La mariposa y el tornado

Teoría del caos y cambio climático

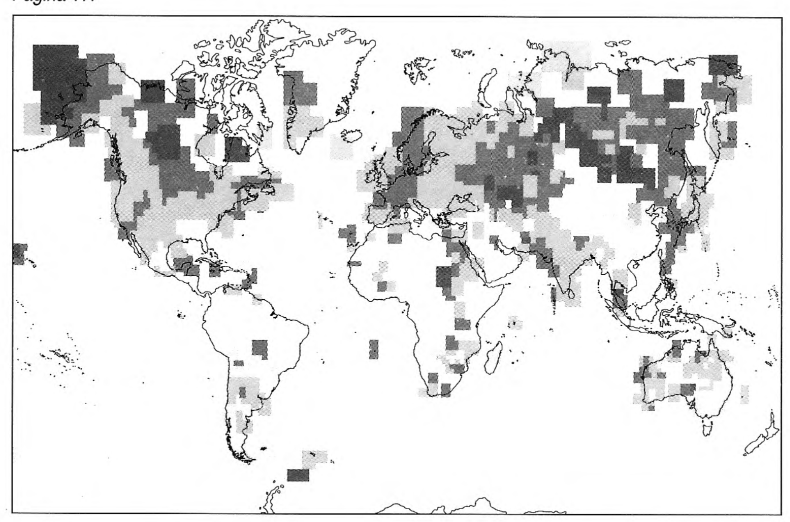
Carlos Madrid



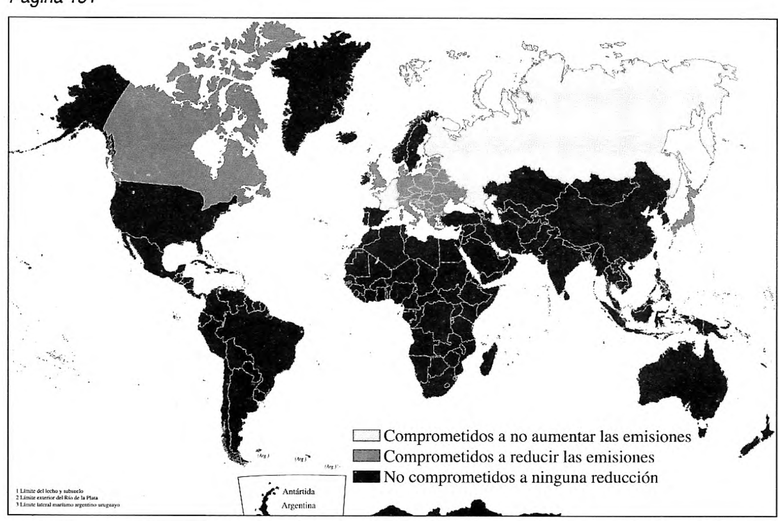
El mundo es matemático

Fe de erratas del mapa del libro La mariposa y el tornado.

Página 111



Página 131



La presente publicación se ajusta a la cartografía oficial establecida por el Poder Ejecutivo Nacional a través del Instituto Geográfico Nacional y fue aprobada por Expe. GG12 1271/5 en el mes de junio de 2012.

La mariposa y el tornado

Teoría del caos y cambio climático

Carlos Madrid

El mundo es matemático

Para Gustavo Bueno

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí
Fotografías: iStockphoto

ISBN: 978-84-473-7435-9
Depósito legal: NA-2691-2011

Impreso y encuadernado en Rodesa, Villatuerta (Navarra)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

Prefacio

¿Puede el aleteo de una mariposa en Brasil originar un tornado en Texas? Sí, desde luego. Y si usted ha leído alguna vez algo sobre el caos, seguro que ya lo sabía. Pero lo que a lo mejor no conoce es la respuesta a la pregunta contraria: ¿puede el aleteo de la misma mariposa en Brasil evitar un tornado sobre Singapur?

Si esta última pregunta le ha sorprendido y quiere averiguar la respuesta, está leyendo el libro correcto. La mayoría de libros que abordan el tema de la teoría del caos y su conexión con la meteorología y la climatología sólo tratan la primera pregunta y dejan aparcada la segunda, pero este libro quiere atacar las dos: quiere mostrar las dos caras del caos. Por cierto, la respuesta a la segunda cuestión también es afirmativa.

La mariposa del título de este libro no está tan indefensa ante el tornado como en principio se podría creer. La mariposa de Lorenz ha acabado convirtiéndose en el símbolo de la teoría del caos. Exactamente igual que el gato de Schrödinger lo es de la mecánica cuántica. Por desgracia, la mariposa de Lorenz es tan difícil de domesticar como el gato de Schrödinger, porque la teoría del caos y la mecánica cuántica son, sin duda, las dos fracturas más serias que el ideal científico de la predictibilidad y del determinismo, respectivamente, haya sufrido nunca. Sobre todo, en nuestro caso, teniendo en cuenta que una de las propiedades más inquietantes del caos es su ubicuidad. El sistema solar, el tiempo meteorológico y el clima, las poblaciones y las epidemias, las turbulencias, el goteo de un grifo, algunas reacciones químicas, el humo de un cigarro, los latidos del corazón, las señales del cerebro y los mercados financieros, sólo por citar unos cuantos, son ejemplos de sistemas caóticos. Lo realmente asombroso no es que ciertos sistemas complejos sean caóticos, sino que sistemas extraordinariamente simples, como un péndulo doble, lo sean.

Este libro trata sobre el caos, es decir, sobre el comportamiento errático e impredecible de algunos sistemas dinámicos y su relación con un problema de rabiosa actualidad: el cambio climático. El comportamiento caótico aparece cuando hay una sensibilidad a las condiciones iniciales, cuya imagen es el llamado «efecto mariposa», que experimentamos diariamente en las predicciones meteorológicas, pero también, como tendremos ocasión de comprobar, en las predicciones climáticas. Pocos temas relacionados con la ciencia suscitan tanto interés como el cambio climático. Pero para poder acercarnos al tema como lo hacen los propios científicos, tenemos que ser capaces de distinguir entre la alarma mediática que a veces lo envuelve y la matemática, que define el comportamiento real del sistema climático.

Tras dejar constancia de las consecuencias revolucionarias del caos (que harán torcer el gesto a un gran filósofo), a lo largo de los dos primeros capítulos ofreceremos una panorámica del nacimiento y la historia de la teoría del caos. A continuación, en el tercer capítulo, explicaremos las principales nociones relacionadas con el caos, incluyendo las más modernas aplicaciones interdisciplinarias. Y, en los dos últimos capítulos, ilustraremos cómo estos métodos y conceptos se concretan dentro del problema del cambio climático, que, por su parte, también intentaremos presentar de un modo general y abarcable para todos.

Escribir un libro ameno pero profundo sobre la teoría del caos no es fácil. Hacerlo sobre el tema del cambio climático tampoco lo es. Pero escribirlo sobre ambas cuestiones al mismo tiempo no es ya doblemente difícil, sino cuádruplemente difícil (como poco). Son cosas de la no-linealidad. Bromas aparte, si el lector cierra la última página de este libro habiendo comprendido el porqué de este juego de palabras, nos daremos por satisfechos, pues significa que habrá penetrado en el núcleo de la teoría del caos y de los problemas que ella aborda. Me refiero a la cuestión de la dinámica no lineal, en que la suma de dos causas suele ser explosiva...

Combinar la matemática y la divulgación ha supuesto un salto cuántico que ha revolucionado mi posición. Poco a poco la incertidumbre del momento se ha desvanecido y ambos saberes, científico uno y humano otro, han aparecido como duales y complementarios. De todos modos, esta perturbación de mi trayectoria vital no hubiera sido posible sin la modificación en las condiciones iniciales que practicaron en su día mis profesores del bachillerato y de la carrera, que encaminaron mis caóticos pasos hacia ese atractor extraño que es la matemática y su historia. No hay razón para no agradecer su generosidad a las muchas personas que me han dado impulso para acometer este trabajo: desde Elena, mi madre, los Casado y las Arribes, hasta Javier Fresán y los amigos y compañeros del instituto y la universidad, que no quieren leer el libro pero me han aguantado mientras lo escribía.

Sólo resta una cosa, animarles a que pasen, lean y queden seducidos por el caos.

Capítulo 1

La prehistoria de la teoría del caos

De hecho, a más ciencia, mayor misterio.
Vladimir Nabokov

Immanuel Kant (1724-1804), el gran filósofo conocido en ambos hemisferios, regresa de dar su paseo diario. El criado le sigue a una distancia prudente, buscando no importunar los pensamientos del amo. Kant camina deprisa, aunque con pasos cortos, y siempre por los mismos lugares y a las mismas horas. Es ya costumbre de los habitantes de Königsberg aprovechar la puntualidad matemática de su ilustre vecino para sincronizar los relojes. *Herr* Kant es tan preciso en su paso como la Tierra en su giro alrededor del Sol. Pero hoy, antes de atravesar el jardín y cruzar el umbral de su casa, el autor de la *Crítica de la razón pura* se detiene. Se ha parado a contemplar una planta crecida al amparo de las últimas lluvias. Se trata de un helecho. Entre sus verdes hojas se distingue un insecto que trepa torpemente por el tronco. Es una delicada mariposa. El sabio la acaricia y, a continuación, recorre con sus manos una de las húmedas hojas del helecho y sonríe, admirado de la perfección geométrica de su forma. Murmura algo para sus adentros, mira al cielo sobre su cabeza y entra en su casa.

Minutos después, sentado ante su escritorio junto al fuego, toma la pluma, la moja en el tintero y escribe.

Si Kant levantara la cabeza...

En su libro la *Crítica del juicio*, tras preguntarse si es la propia naturaleza o acaso el matemático quien introduce las matemáticas en la filosofía natural, Immanuel Kant dejó escrito, refiriéndose a los mecanismos imperantes en la naturaleza:

> «Se puede con audacia afirmar que para los hombres es completamente absurdo imaginar o esperar que pueda venir al mundo algún otro Newton que

haga concebible la producción de una brizna de hierba según leyes de la naturaleza no ordenadas por una intención. Hay que negar absolutamente este punto de vista a los hombres.»

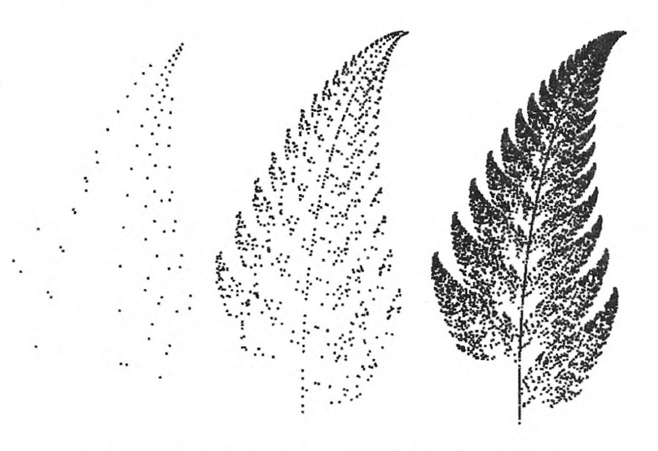


Retrato de Immanuel Kant.
«Las matemáticas, desde los tiempos más remotos, han seguido el seguro camino de la ciencia.»

Sin embargo, esta ambiciosa afirmación se torna hoy día obsoleta, pues, si se nos consiente la comparación, ya ha llegado el tiempo de ese segundo Newton de las hojas de hierba. ¿Su nombre? Michael Barnsley, un matemático inglés experto en uno de los productos más interesantes de la teoría del caos: los fractales. La geometría fractal es, como tendremos ocasión de comprobar a lo largo del libro, la compañera inseparable de la teoría del caos.

Tal y como descubrió Barnsley, con un simple «juego de caos» podemos hacer aparecer, casi como por arte de magia, hojas de helecho, de brócoli, etc. Un juego de caos no consiste más que en ir dibujando puntos de forma aleatoria, hasta que al final esa sucesión de puntos nos dé, en el límite, una imagen conocida. En resumen, con una ley aleatoria —por decirlo como Kant: con una ley no ordenada por una intención— y la ayuda de un ordenador somos capaces de lograr que «brote» una hoja vegetal. Simplificando, basta con realizar lo siguiente: simularemos el lanza-

miento de una moneda de curso legal de manera que, fijado un punto (que no sea el punto central de la pantalla), si sale cara, pintaremos un nuevo punto exactamente a 6 unidades de distancia noroeste del punto anterior, y, si sale cruz, lo pintaremos movido un 25% hacia el punto central respecto del punto previo. Este procedimiento puede, obviamente, iterarse cuantas veces se desee. Pues bien, al comienzo, la distribución de los puntos dibujados resulta en apariencia aleatoria, azarosa. Pero, enigmáticamente, tras unas mil iteraciones, una determinada forma comienza a emerger: poco a poco va apareciendo una diáfana hoja de helecho. Es como si del caos surgiese orden en forma de conjunto fractal: es el helecho de Barnsley.



Generación «espontánea» del helecho de Barnsley.

UN EXTRACTO DE LA NOVELA *EL SIGLO DE LAS LUCES* DE ALEJO CARPENTIER

Contemplando un caracol —uno solo— pensaba Esteban en la presencia de la Espiral durante milenios y milenios, ante la cotidiana mirada de pueblos pescadores, aún incapaces de entenderla ni de percibir siquiera la realidad de su presencia. Meditaba acerca de la poma del erizo, la hélice del muergo, las estrías de la venera jacobita, asombrándose ante aquella Ciencia de las Formas desplegada durante tantísimo tiempo frente a una humanidad aún sin ojos para pensarla. ¿Qué habría en torno mío que esté ya definido, inscrito, presente, y que aún no pueda entender? ¿Qué signo, qué mensaje, qué advertencia, en los rizos de la achicoria, el alfabeto de los musgos, la geometría de la pomarrosa? Mirar un caracol. Uno solo. Tedeum.

Resulta imposible saber qué diría el gran filósofo de Königsberg si alcanzara a ver la sorprendente cantidad de sistemas naturales cuya dinámica es caótica, con todo lo que esto conlleva, es decir, un comportamiento aleatorio o estocástico —en griego *stochastikos* significaba «con buena puntería»— dentro de un estricto determinismo. Muchos movimientos erráticos, sin orden aparente, responden en verdad a reglas fijas que no son consecuencia del azar. Caos y fractales constituyen, pues, una nueva manera de explorar el universo.

Génesis de la teoría del caos

El caos está en boca de todos. En el cine, lo encontramos en películas como *Caos*, *El efecto mariposa* o *Parque Jurásico*. Y en la literatura, en novelas como *El pintor de batallas*, del español Arturo Pérez-Reverte, en la que una fotografía tomada fortui-

UN DIÁLOGO DE LA PELÍCULA *PARQUE JURÁSICO* (STEVEN SPIELBERG, 1993), BASADA EN LA NOVELA HOMÓNIMA DE MICHAEL CRICHTON

—El tiranosaurio no obedece a un sistema fijo y de horario del parque, es la esencia del caos.

—No entiendo eso del caos. ¿Qué significa?

—Se trata de la imprevisibilidad en sistemas complejos. Se resume en el efecto mariposa. Una mariposa bate las alas en Pekín, y en Nueva York llueve en lugar de hacer sol. ¿Voy demasiado deprisa? Deme ese vaso de agua. Verá. El coche no para de saltar, pero no importa, sólo es un ejemplo. Ponga la mano plana como un jeroglífico. Digamos que cae en su mano una gota de agua. ¿Hacia qué lado irá? ¿Hacia el pulgar? ¿Hacia el otro lado?

—No sé... ¡hacia el pulgar!

—Bien, ahora, quieta la mano, no se mueva, voy a hacer lo mismo, en el mismo sitio. ¿En qué dirección cree que irá?

—No sé... ¿En la misma dirección?

—¡Ha cambiado! ¿Por qué? Debido a pequeñas variaciones microscópicas (a la orientación del vello de la mano, a la cantidad de sangre que dilata los vasos, a las imperfecciones microscópicas de la piel...), que nunca se repiten y afectan mucho al resultado. Eso es... imprevisibilidad. Ve, nadie podría prever que el doctor Grant saltaría de pronto de un vehículo en marcha. He aquí otro ejemplo más. Y aquí estoy ahora mismo hablando solo. Eso, eso es la teoría del caos.

tamente cambia por completo la vida de un guerrillero croata, y en relatos como *El sonido del trueno*, de Ray Bradbury, en la que la muerte de una mariposa prehistórica altera el resultado de una elección presidencial en Estados Unidos, o como *El hundimiento de la Baliverna*, de Dino Buzzati, que relata cómo una escalada ociosa por un destartalado muro provoca un desenlace inesperado.

Pero, ¿qué es el caos? La mayoría de los diccionarios recogen varias acepciones del término. El de la Real Academia Española, por ejemplo, presenta tres. La primera y la segunda remiten, respectivamente, a su empleo en la Grecia clásica y a su uso en sentido coloquial:

1. Estado amorfo e indefinido que se supone anterior a la ordenación del cosmos.
2. Confusión, desorden.

Pero, en cambio, la tercera acepción nos plantea ya cuál es su significado en matemáticas y en física:

3. Comportamiento aparentemente errático e impredecible de algunos sistemas dinámicos, aunque su formulación matemática sea en principio determinista.

Este libro trata, como es natural, sobre el caos en esta última acepción, la científica, aunque no renuncia a analizar cómo el caos matemático está encontrando su lugar en el imaginario colectivo gracias a sus aplicaciones tecnológicas en el campo de la física, la biología, la medicina, las neurociencias... Los mecanismos que funcionan en nuestro mundo, desde el cerebro humano hasta el clima, están impregnados de caos.

En este primer capítulo y en el siguiente vamos a trazar la historia de la teoría matemática del caos, que nos llevará desde la época de Newton, en tiempos de la revolución científica, hasta nuestros días, en pleno siglo XXI. No obstante, fue a caballo entre los siglos XIX y XX cuando una serie de problemas abiertos en la mecánica celeste y relativos a la estabilidad del sistema solar (¿chocará la Luna con la Tierra?, ¿impactará un asteroide contra nuestro planeta acabando con la vida humana?) precisaron de un hombre de talento que arrojara nueva luz sobre ellos: éste fue Henri Poincaré. Tanto en este capítulo como en el siguiente vamos a manejarnos con una idea intuitiva de caos muy próxima a la de la mecánica, por cuanto ésta fue

la primera disciplina en describir esos movimientos extraños que hoy día asociamos con los sistemas caóticos. Será en el tercer capítulo donde intentaremos formalizar un poco más las cosas, definiendo con algo de precisión en qué consiste exactamente ese «efecto mariposa» del caos que se mencionó en el prefacio y que ya nos ha salido en nuestro repaso a la literatura y al cine.

Pero vayamos por partes y comencemos por el principio. La llamada teoría del caos nació de la mano de algunos matemáticos interesados en la vinculación entre los sistemas dinámicos, los sistemas que evolucionan con el tiempo, y la geometría, como el ya mencionado Henri Poincaré o Stephen Smale; algunos físicos de campos tan dispares como la meteorología o la astronomía, como Edward Lorenz o Michel Hénon, y algunos biólogos estudiosos del crecimiento de poblaciones, como Robert May. Pero a esta larga lista también deberían sumarse por méritos propios bastantes científicos multidisciplinarios, como James Yorke, David Ruelle, Mitchell Feigenbaum, Michael Barnsley y muchos otros. Aunque, ¿cómo empezó todo? ¿Cuál es la verdadera historia del caos?

Nos embarcamos, pues, en un viaje hacia las fuentes de la teoría del caos en que recorreremos los tres ríos que desembocan en el mar de los sistemas dinámicos: el de la mecánica de Newton, el de la mecánica analítica de Laplace y, por último, el de la teoría general soñada por Poincaré, quien se erige, por derecho propio, como principal protagonista de este capítulo.

De Newton a Laplace, pasando por Leibniz

El intento de comprender las trayectorias planetarias observadas por Kepler condujo a Newton a modelarlas matemáticamente, siguiendo la estela de Galileo. Así, formuló sus leyes de un modo matemático que relacionaba entre sí las magnitudes físicas y sus velocidades de cambio, es decir, el espacio recorrido por un móvil con su velocidad, o la velocidad del móvil con su aceleración, por poner dos ejemplos. Las leyes físicas que describían los sistemas dinámicos quedaron, por tanto, expresadas por medio de ecuaciones diferenciales, en las que los diferenciales eran medidas de los ritmos de cambio.

Una ecuación diferencial es una ecuación cuya principal incógnita es el ritmo de cambio de una magnitud, esto es, su diferencial o derivada. Tanto el diferencial como la derivada de una función representan cómo varía el valor de la misma, es decir, si aumenta, disminuye o permanece constante. La aceleración, por seguir con el ejemplo, mide los cambios en la velocidad del móvil, ya que es el cociente de los

diferenciales de la velocidad y del tiempo; en otros términos, es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo. En consecuencia, expresa la variación de la velocidad en el tiempo.

Sin embargo, la resolución de ecuaciones diferenciales, como la de ecuaciones algebraicas (las de toda la vida), no siempre resulta fácil. Es más, casi nunca lo es. En este sentido, la posterior mecánica analítica supuso un avance con respecto a la mecánica de Newton, pues al aproximar la mecánica al análisis, alejándola de la geometría, el hecho de estudiar un fenómeno físico y el de hallar las ecuaciones diferenciales que lo gobiernan se hicieron sinónimos. Así, tras el hallazgo por parte de Newton de la célebre ecuación diferencial «fuerza igual a masa por aceleración» que rige el movimiento de los sistemas de puntos y de los sólidos rígidos, el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) formuló un sistema de ecuaciones diferenciales que describía el movimiento de medios continuos como el agua, el aire u otros fluidos sin viscosidad; después, el matemático y físico Joseph Louis Lagrange (1736-1813) centró su atención en las ondas del sonido, es decir, en las ecuaciones de la acústica, y, más tarde, Jean-Baptiste Fourier (1768-1830) se centró en el flujo del calor, proponiendo una ecuación que lo describía. El análisis matemático era, según la opinión de Fourier, tan extenso como la propia naturaleza.

Entre los siglos XVII y XIX, los físicos fueron extendiendo su dominio matemático sobre el mundo al ir proponiendo nuevas ecuaciones diferenciales —por ejemplo, las ecuaciones de Navier-Stokes de los fluidos viscosos o las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo— para estudiar fenómenos provenientes de cualquier campo. Así, toda la naturaleza —sólidos, fluidos, sonido, calor, luz, electricidad— quedó modelada mediante ecuaciones diferenciales. Ahora bien, una cosa era dar con las ecuaciones del fenómeno en cuestión y otra bien distinta, resolverlas.

En principio, hay dos tipos de ecuaciones diferenciales: las lineales y las no lineales. Una ecuación diferencial es lineal si la suma de dos soluciones es de nuevo una solución. Además, en una ecuación lineal ni la función incógnita ni su derivada están elevadas a ninguna potencia distinta de cero o uno. Las ecuaciones diferenciales lineales modelizan fenómenos en los que el efecto de una suma de causas es la suma de los efectos de cada una de las causas por separado. Por el contrario, en los fenómenos y en las ecuaciones no lineales no se da esta suerte de proporcionalidad entre causas y efectos, de manera que la conjunción de dos causas distintas puede llegar a ser explosiva. Esta no-linealidad, como tendremos ocasión de ver, está siempre detrás del caos.

NEWTON Y LA PRIMERA ECUACIÓN DIFERENCIAL

La ecuación diferencial más célebre es, sin duda, la que debemos a Newton: «fuerza igual a masa por aceleración». Simbólicamente: $F=m \cdot a$, donde $a=\frac{dv}{dt}$ (la aceleración es el cociente de los diferenciales de la velocidad y del tiempo, es decir, la derivada de la velocidad con respecto al tiempo). Veamos otros dos ejemplos sencillos para fijar ideas:

$$\frac{dy}{dx}+y=0$$

es una ecuación diferencial lineal, pero

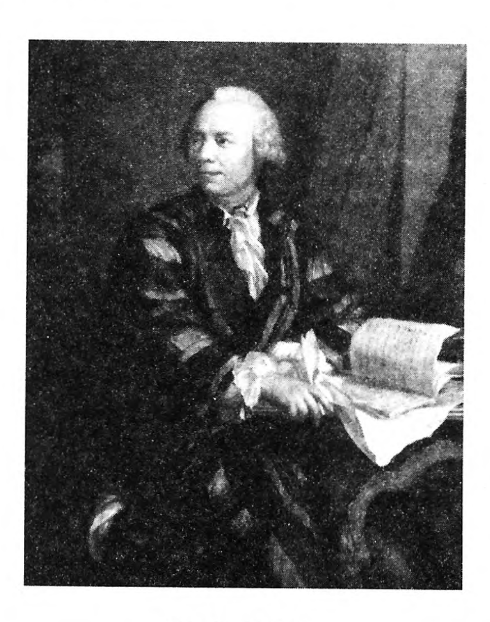
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^m+y^n=0$$

para cualquier valor de m y n distinto de 0 y 1 es ya una ecuación diferencial no lineal, porque en ella tanto la función incógnita como su derivada están elevadas a potencias distintas de 0 y 1.

La teoría de las ecuaciones diferenciales lineales fue desarrollada por completo en poco tiempo. Pero no ocurrió lo mismo con la teoría gemela, la de las ecuaciones diferenciales no lineales, y los problemas no lineales —como, por ejemplo, la ecuación del péndulo— se resolvían «linealizándolos», es decir, eliminando todos los términos incómodos de la ecuación. En otras palabras, dada una ecuación diferencial no lineal, se resolvía una ecuación diferencial lineal parecida y se usaban las soluciones obtenidas como soluciones de aproximación de la no lineal. Era el llamado «método de perturbaciones». Sin embargo, esta técnica pronto se mostró insuficiente, puesto que no funcionaba en múltiples casos. Hubo que esperar mucho tiempo para que las ecuaciones no lineales recibieran una atención pareja a la que tuvieron las ecuaciones lineales.

Uno de los problemas no lineales que trajo de cabeza a los físicos y matemáticos desde el siglo XVII fue, dentro del campo de la mecánica celeste, la modelización del sistema solar, el problema de los *n* cuerpos, que puede enunciarse de manera muy sencilla: dados *n* cuerpos de distintas masas bajo atracción gravitacional mutua, se trata de determinar el movimiento de cada uno de ellos en el espacio. Aunque el problema tiene un enunciado aparentemente de gran simplicidad, su solución no es en absoluto fácil. Newton resolvió de manera geométrica el problema de dos cuerpos para dos esferas moviéndose bajo atracción gravitacional mutua en los *Philosophiæ naturalis principia mathematica (Principios matemáticos de la*

filosofía natural), y en 1734 Daniel Bernoulli (1700-1782) lo resolvió de modo analítico en una memoria premiada por la Academia francesa, pero no fue hasta 1744 cuando, finalmente, Euler lo resolvió con todo detalle en su tratado *Theoria motuum planetarum et cometarum*.



Retrato de Euler.
«Lean a Euler, él es el maestro de todos nosotros» (Laplace).

LA ECUACIÓN NO LINEAL DEL PÉNDULO

Si θ representa el ángulo de inclinación del péndulo con respecto a la vertical, $\frac{d^2\theta}{dt^2}+sen\theta=0$ es la ecuación diferencial no lineal del péndulo. Para oscilaciones pequeñas, la ecuación puede «linealizarse» aproximando la función trigonométrica senθ por θ. La ecuación resultante $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\theta=0$ puede ya resolverse fácilmente (es una ecuación diferencial lineal de orden 2, porque aparece una derivada segunda, pero nótese que ni la derivada segunda ni θ aparecen elevadas a un exponente mayor que 1).

Otro ejemplo de ecuación diferencial no lineal es el siguiente: $m\frac{dv}{dt}-v^2=mg$, donde g es la aceleración de la gravedad (9,8 m/s^2), que describe el movimiento de un proyectil en un medio cuya resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad (v^2 es, precisamente, el término que hace no lineal la ecuación).

Tras ser resuelto el problema de los n cuerpos para $n = 2$, los físicos y matemáticos de los siglos XVIII y XIX se enfrentaron a este mismo problema para $n = 3$, puesto que el conocimiento de los movimientos del sistema formado por el Sol, la Tierra y la Luna lo precisaba. Se iniciaron entonces dos programas de investigación paralelos. Por un lado, se buscaron soluciones generales aproximadas mediante el método de perturbaciones y, por otro, se buscaron soluciones particulares exactas. Así, por ejemplo, Lagrange resolvió el problema de tres cuerpos restringido al sistema formado por el Sol, Júpiter y el asteroide Aquiles. La obra más célebre de Lagrange, su *Mécanique analytique (Mecánica analítica)*, coronó el trabajo de Newton en mecánica. Y aunque su ídolo era Arquímedes, Lagrange se quejó en cierta ocasión de que Newton había sido un hombre de lo más afortunado, pues había un solo universo y éste había descubierto sus leyes matemáticas.

Simultáneamente, apareció una cuestión muy relacionada con el problema de los n cuerpos: la de la estabilidad del sistema solar (que, a fin de cuentas, en la época pasaba por ser un sistema de sólo siete cuerpos), cuya solución depende directamente de cuál se le dé a aquél. Newton sabía que el problema de los dos cuerpos se podía resolver con exactitud para cualquier tiempo, pero que no ocurría lo mismo cuando un tercer cuerpo entraba en interacción. Aunque débiles en comparación con la fuerza de atracción del Sol, las fuerzas entre los planetas no eran ni mucho menos despreciables, por cuanto que a la larga podían desviar algún planeta de su órbita e incluso, en el límite, expulsarlo fuera del sistema solar. Las fuerzas interplanetarias podían estropear las bellas elipses keplerianas, por lo que no era posible predecir el comportamiento del sistema solar en un futuro lejano. De hecho, en su trabajo *De motu corporum in gyrum* de 1684, Newton afirmaba que los planetas ni se mueven exactamente en elipses ni recorren dos veces la misma órbita. Además, reconocía que definir estos movimientos para todo el futuro excedía con mucho la fuerza entera del intelecto humano.

Hoja manuscrita del De motu corporum in gyrum *de Newton.*

Por consiguiente, seguía en pie esta acuciante pregunta: ¿es el sistema solar estable o inestable? ¿Permanecerá cada astro dentro de su órbita o, en el futuro, se desviará? Para Newton, si el sistema solar se iba desajustando, se necesitaba una solución drástica: la mano de Dios tenía que empujar cada planeta dentro de su elipse, restableciendo la armonía cada cierto tiempo. Frente a Newton, Leibniz sostenía que el Creador no podía ser un relojero tan torpe. El *deus ex machina* newtoniano provocaba la ira del espantado Leibniz.

Bastantes décadas después, Pierre-Simon Laplace (1749-1827), el gran físico matemático que llegó a ministro del Interior de Napoleón (aunque fue destituido a los pocos meses, pues «llevaba el cálculo infinitesimal —dijo irritado Napoleón— a todas las cuestiones de la vida»), creyó explicar las anomalías orbitales de Saturno

LA POLÉMICA LEIBNIZ-CLARKE

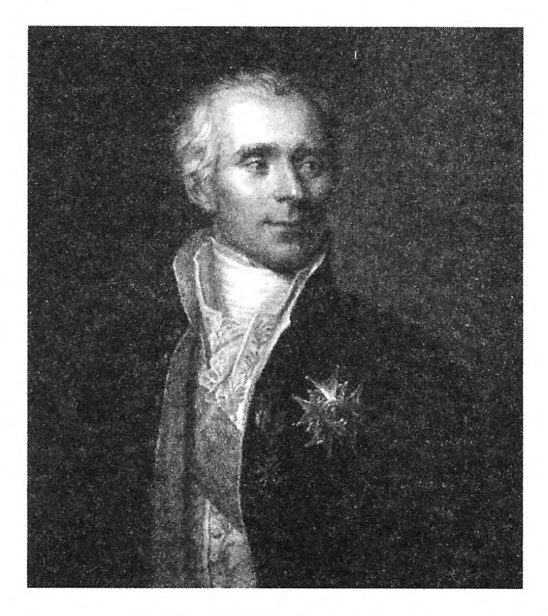
Entre 1715 y 1716, el filósofo, matemático, jurista y embajador, entre otras muchas profesiones, Gottfried Leibniz (1646-1716) entabló un debate por correspondencia con Samuel Clarke (1675-1729), un clérigo anglicano adepto de Newton. La discusión, no exenta de tintes teológicos, abordaba las consecuencias para la ortodoxia cristiana de la mecánica de Newton. Leibniz ya había mantenido otra cruda discusión epistolar con el propio Newton sobre la paternidad del cálculo (diferencial e integral), en la que ambos habían acabado acusándose mutuamente de plagio. En ésta, entre otras cosas, Leibniz discutía los descubrimientos de Newton con respecto al problema de los tres cuerpos y la estabilidad del sistema solar. La supuesta perfección de Dios obligaba a que éste fuera el mejor de los mundos posibles y, por tanto, resultaba absurdo que Dios tuviera que dar cada cierto tiempo cuerda al reloj del universo. ¿Cómo iba Dios a haber creado un mundo en que los planetas podían salirse de sus órbitas? A juicio de Leibniz, con sus teorías Newton infravaloraba el poder divino. En efecto, en *Opticks*, Newton afirmaba: «Debido a la tenacidad de los fluidos, al rozamiento de sus partes y a la debilidad de la elasticidad de los cuerpos, el movimiento es mucho más proclive a perderse que a ganarse y siempre está extinguiéndose». A lo que Leibniz preguntaba: «¿La máquina de Dios es capaz de caer en tales desórdenes que esté obligado a repararla como si fuese un artesano?». Newton contestó, para no rebajarse, por puño y letra de Clarke... y la polémica Leibniz-Newton acabó significando la ruptura de la matemática británica con la de la Europa continental por mucho tiempo. Y viceversa: los franceses, por ejemplo, siguieron a Descartes y su antediluviana teoría de los vórtices hasta que Voltaire regresó de Inglaterra en 1727 apoyando la teoría de la gravedad de Newton.

y Júpiter, que tanto preocuparon a Newton, como meras perturbaciones que sólo dependían de la ley de gravitación y que tendían a compensarse con el transcurso del tiempo; Júpiter estaba sometido a una aceleración aparente, mientras que Saturno parecía frenarse poco a poco, de manera que, si estos movimientos continuaban indefinidamente, el primero escaparía del sistema solar y el segundo caería sobre el Sol. Laplace demostró que la aceleración de Júpiter y la desaceleración de Saturno estaban ocasionados por pequeños efectos, de segundo orden, debidos a la posición relativa de ambos planetas respecto del Sol. El sistema solar se autorregulaba. Casi cien años después parecía que el optimista Leibniz había triunfado sobre el agorero Newton. Así, al presentar su *Traité de mécanique céleste* (*Tratado de mecánica celeste*) a Napoleón, cuando éste le hizo notar que no había encontrado el nombre de Dios en ninguno de los tomos de su monumental obra, Laplace pudo contestarle que Dios no era una hipótesis necesaria en su sistema del mundo. Un sistema que él creía plenamente predeterminado y estable. Con palabras entresacadas de las páginas del inicio de su *Ensayo filosófico sobre las probabilidades* (1814):

> «Debemos, pues, considerar el estado presente del universo como el efecto de su estado anterior y como la causa del siguiente. Una inteligencia que, en un instante dado, conociera todas las fuerzas de que se halla animada la naturaleza, así como la situación respectiva de los seres que la componen, si, además, fuera lo suficientemente amplia como para someter estos datos a análisis, podría abarcar en una sola fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo y los del átomo más pequeño: nada le resultaría incierto y, tanto el futuro como el pasado, se hallarían presentes a sus ojos. La mente humana ofrece en la perfección que ha sabido dar a la astronomía un débil esbozo de esta inteligencia. Sus descubrimientos en mecánica y en geometría, junto al de la gravitación universal, han puesto a su alcance comprender en las mismas expresiones analíticas los estados pasados y futuros del sistema del mundo».

Sin embargo, la respuesta de Laplace distaba años luz de ser exacta. En sus ecuaciones del sistema Sol-Júpiter-Saturno (problema de los tres cuerpos), Laplace despreció un término matemático que él consideraba muy pequeño, pero que, por el contrario, podía crecer rápidamente y sin límite hasta desestabilizar el sistema solar. Mientras que Lagrange era un matemático muy cuidadoso en sus escritos, Laplace era como un zorro que con la cola borra sus propias huellas. Se olvidaba frecuente-

mente de reconocer la fuente de sus resultados, por lo que daba la impresión de que todos eran suyos, y solía resolver casi de pasada los problemas matemáticos con que se encontraba en sus investigaciones físicas. El astrónomo norteamericano que tradujo el *Tratado de mecánica celeste* al inglés dijo que cada vez que se encontraba con la frase «es fácil ver que...» sabía que le esperaban horas de duro trabajo para rellenar las lagunas del texto.



Retrato de Laplace (1749-1827), «el Newton de la Francia revolucionaria».

Fueron muchos los físicos y matemáticos decimonónicos que dedicaron sus esfuerzos a dar una respuesta completa al problema de los tres cuerpos y a la cuestión de la estabilidad del sistema solar, pues se llegaron a contabilizar más de 800 trabajos al respecto desde los tiempos del gran Newton hasta 1900. Pero entre los matemáticos a los que este problema sin resolver les quitó el sueño hubo uno que resultó clave en la configuración de la teoría del caos: el genial Henri Poincaré (1854-1912).

El concurso del rey Óscar

Desde niño, Poincaré fue muy despierto para las matemáticas, aunque torpe y distraído para el resto de cosas. De hecho, se lo considera el último matemático gene-

ralista, pues, a diferencia de uno especialista, una curiosidad universal lo llevó a investigar temas de análisis, ecuaciones diferenciales, grupos, topología, mecánica celeste y física matemática, así como de filosofía, enseñanza y divulgación de las ciencias. Y, desde luego, fue el primer matemático en toparse cara a cara con el caos gracias a su estudio del problema de los tres cuerpos.



Jules Henri Poincaré a los 36 años.
«El pensamiento no es más que un relámpago en medio de la larga noche, pero ese relámpago lo es todo.»

La egregia memoria de Poincaré sobre este problema fue publicada en 1890, cuando contaba sólo 36 años, aunque la historia de su publicación había comenzado tiempo atrás. Varios años antes, en 1885, los matemáticos europeos tuvieron noticia de que un importante concurso internacional de matemáticas iba a ser convocado bajo el auspicio de Óscar II, rey de Suecia y de Noruega, quien sentía una debilidad manifiesta por esta materia como consecuencia de haber cursado algunas asignaturas en la universidad. Dentro de una competencia internacional iba a ofrecerse un premio al matemático capaz de resolver por fin el problema de los tres cuerpos y, de este modo, abrir el camino al estudio de la estabilidad del sistema solar.

En efecto, en 1884, Gösta Mittag-Leffler (1846-1927), profesor de matemáticas puras en la Universidad de Estocolmo, le había propuesto al rey Óscar II la convo-

catoria de un concurso matemático con el fin de conmemorar el sexagésimo aniversario del monarca, que tendría lugar cinco años más tarde, concretamente el 21 de enero de 1889. Hay que decir que esta clase de concursos no eran inusuales en la época, y aunque los premios no eran económicamente muy altos, proporcionaban un prestigio considerable a los ganadores, comparable al de los futuros premios Nobel. Por otro lado, Mittag-Leffler quería asociar el concurso a la revista *Acta Mathematica*, fundada no hacía mucho por él con la ayuda inestimable del rey, con el objetivo de que atrajese artículos importantes.

El diseño del comité organizador y del jurado no fue nada fácil. El profesor quería evitar enfrentamientos y rivalidades entre los miembros, así como futuras acusaciones de partidismo, y terminó decidiéndose por un tribunal próximo a él: sus antiguos mentores, Charles Hermite y Karl Weierstrass, como representantes de las escuelas francesa y alemana, y Sofia Kovalévskaya, una alumna brillante de Mittag-Leffler y de Weierstrass, la cual, desgraciadamente, murió demasiado joven para las matemáticas, a los 41 años, de una gripe.

Con la ayuda de Mittag-Leffler, el comité formuló cuatro preguntas, una de las cuales requería la solución al problema de los *n* cuerpos:

> «Dado un sistema formado por un número arbitrario de puntos materiales que se atraen mutuamente de acuerdo con las leyes de Newton, se propone desarrollar las coordenadas de cada partícula en una serie procedente de funciones conocidas del tiempo y que sean uniformemente convergentes para cualquier valor del tiempo.
>
> »Parece ser que este problema, cuya solución ampliará nuestro conocimiento sobre el sistema del universo, puede ser resuelto por medio de las herramientas analíticas de que se dispone actualmente; esto es, al menos, lo que cabe suponer, ya que, poco antes de su muerte, Lejeune Dirichlet comunicó a un matemático amigo suyo, Leopold Kronecker, que había descubierto un método para integrar las ecuaciones diferenciales de la mecánica y que él había tenido éxito al aplicar este método para demostrar la estabilidad de nuestro sistema planetario de manera totalmente rigurosa. Por desgracia, no sabemos nada sobre dicho método, aunque se puede suponer, casi con total certeza, que no estaba basado en largos y complicados cálculos, sino en el desarrollo de una idea fundamental y simple, que se espera razonablemente que se pueda encontrar de nuevo por medio de un estudio más serio y perseverante.

»Sin embargo, en el caso de que nadie tenga éxito en resolver el problema propuesto dentro del plazo del concurso, el premio podría ser otorgado a un trabajo en el cual algún otro problema de la mecánica sea tratado en la forma indicada y resuelto completamente».

Cuando el anuncio se publicó en *Acta Mathematica*, Poincaré, que tan sólo contaba 31 años, ya era conocido en el mundo de las matemáticas. De hecho, los miembros del jurado habían pensado en él como uno de los posibles concursantes, pero a él le costó un poco tomar la decisión. Mittag-Leffler tuvo que enviarle una carta animándole a participar, a la que Poincaré respondió que esperaba atacar el problema de los tres cuerpos no ya para resolverlo, empresa que le parecía casi imposible, sino al menos para obtener nuevos resultados relevantes dignos de ser enviados al concurso.

Alentado finalmente por la competencia, Poincaré profundizó en muchas de las ideas acerca de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales que había desarrollado entre 1881 y 1885, y que había sedimentado en una colección de cuatro memorias, la principal de las cuales era la «Memoria sobre las curvas definidas por una ecuación diferencial». En estos trabajos, Poincaré se había ocupado de las ecuaciones diferenciales lineales y no lineales desde una perspectiva menos cuantitativa (búsqueda de soluciones explícitas) que cualitativa (estudio general de la dinámica y de su estabilidad), por lo que había recurrido a la naciente topología o *analysis situs* (ése era el término empleado en la época). A diferencia de Lagrange, quien alardeaba de que su *Mecánica analítica* no contenía ni un solo dibujo, Poincaré no había temblado al echar mano otra vez de la geometría.

En efecto, consciente de la imposibilidad de resolver la vasta mayoría de ecuaciones diferenciales (en especial aquellas ecuaciones no lineales para las que el método de perturbaciones fracasaba), es decir, consciente de la dificultad de integrar las ecuaciones expresando sus soluciones como funciones conocidas, Poincaré realizó un estudio geométrico de ellas. Comenzó considerando la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

donde la derivada de y con respecto a x es igual al cociente de dos funciones P y Q cualesquiera. Y se detuvo en el estudio de los llamados puntos «singulares» o «críticos», es decir, aquellos puntos (x, y) para los que $P(x, y) = Q(x, y) = 0$. Dicho de otro modo, los puntos para los que la derivada de y con respecto a x vale 0 partido por 0, o lo que es lo mismo, para los que sale una indeterminación (recuérdese que no

LA GEOMETRÍA DE LAS TIRAS DE GOMA

La topología es la ciencia matemática que se ocupa de los objetos geométricos atendiendo sólo a su forma y posición, sin tener en cuenta propiedades cuantitativas, como las relaciones métricas. Es, por ejemplo, lo que ocurre en el plano del metro, que conserva la información de las estaciones y de los cruces entre líneas pero distorsiona las distancias. Su mayor impulsor fue, desde luego, Poincaré, quien la popularizó presentándola como una utilísima geometría cualitativa. Con sus propias palabras:

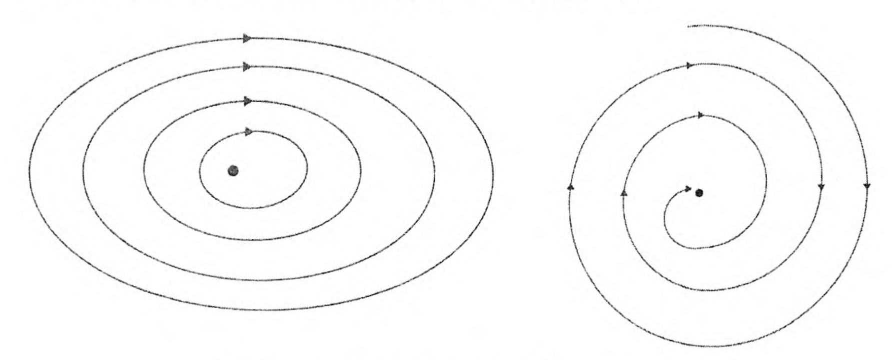
> «Es lo que se llama el *analysis situs*. Es todo un cuerpo de doctrina que ha atraído la atención de los más grandes geómetras y del que se ven surgir, uno tras otro, una serie de teoremas importantes. Lo que diferencia esos teoremas de la geometría ordinaria es que son puramente cualitativos y que permanecerían válidos si las figuras fueran copiadas por un dibujante inhábil que alterara groseramente las proporciones y reemplazase las rectas por un trazo más o menos curvo».

Poincaré definía la topología como la geometría de las bandas de caucho, porque si las figuras fueran de goma elástica sería posible deformar muchas de ellas en otras. Por ejemplo, desde el punto de vista topológico, una esfera y un cubo son indistinguibles, pues no importa que aquélla sea lisa y éste tenga aristas. Es conocido que, según reza el dicho, un topólogo no es más que un matemático que no distingue entre un donut y una taza de café, ya que a su descuidada vista lo único que resalta es que ambos objetos tienen un único agujero (el agujero de la rosquilla y el agujero del asa). Ya sabemos distinguir entre un donut y una naranja atendiendo a si hay o no hay agujero, pero ¿cómo los distinguiríamos si hipotéticamente fuésemos diminutos habitantes que viviésemos sobre su superficie? (La cuestión no es baladí, dado que la esférica tierra que pisamos nos parece plana.) Un método para salir de dudas es estudiar el grupo de Poincaré de nuestro espacio. Supongamos que tenemos un perro al que hemos atado con una cuerda elástica muy larga fijada a nuestra casa y lo dejamos vagar libremente un par de días. Cuando vuelva, en caso de vivir sobre un donut, lo más probable es que regrese con la correa tirante, por haber dado alguna vuelta alrededor del agujero. Por el contrario, si vive sobre una naranja, regresará con la correa floja y podremos recogerla, contraerla.
A Poincaré se le debe también la famosa conjetura que lleva su nombre: «¿Es la esfera tridimensional la única variedad de dimensión tres tal que todo lazo sobre ella se contrae en un punto?». Esta conjetura generalizada fue resuelta favorablemente en cuatro dimensiones por Friedmann y en más de cuatro por Smale, pero para tres dimensiones aún se resistía, hasta que, en 2003, el matemático ruso Grigori Perelman anunció que la había demostrado.

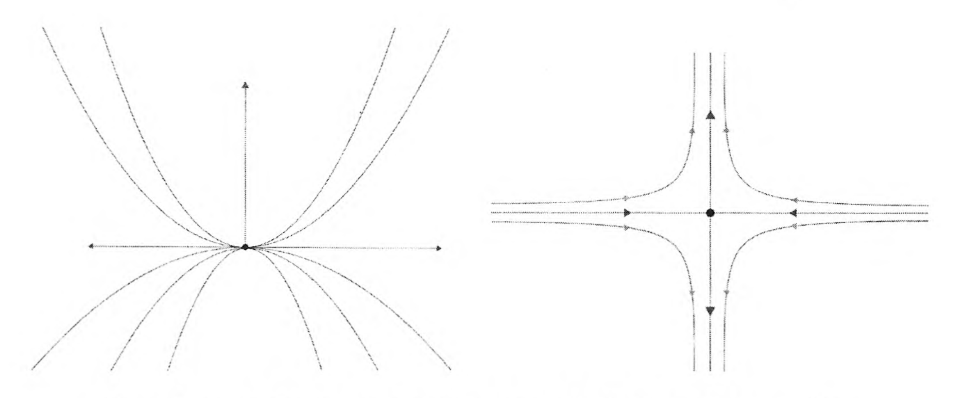
tiene sentido dividir por 0). Por esto son denominados, precisamente, puntos singulares o críticos.

A continuación, Poincaré procedió a estudiarlos topológicamente: observó cómo se comportan las curvas definidas por la ecuación diferencial en su entorno, pues, a fin de cuentas, las soluciones de la ecuación diferencial de partida son funciones de un tipo tal que cada una de ellas permite dibujar una curva en el plano. Dicho con más precisión: permite dibujar una curva en el llamado plano de fases. La palabra «fase» viene del campo de la ingeniería eléctrica y se refiere al estado o lugar en que se encuentra una determinada solución. Así, el plano de fases nos da un retrato de la familia de curvas que son solución de la ecuación diferencial, que a menudo son llamadas trayectorias o, por analogía con el movimiento de los planetas, órbitas.

Poincaré clasificó los puntos singulares o críticos en cuatro clases: centros, sumideros, fuentes y puntos de silla. Los nombres provienen del campo de la mecánica de fluidos, por la analogía del plano de fases y sus trayectorias u órbitas con un fluido que se estuviera difundiendo o desparramando sobre él. Los «centros» son puntos de equilibrio rodeados de órbitas periódicas; los «sumideros», puntos de equilibrio estable que atraen las trayectorias que están a su alrededor (son como los desagües del plano de fases); por contra, las «fuentes» son puntos de equilibrio inestable porque repelen las trayectorias que están en su entorno (continuando con la imagen de fontanería, son como los grifos de los que sale el fluido del plano de fases), y, por último, los «puntos de silla» o «sillas de montar» son puntos de equilibrio estable e inestable al mismo tiempo. En ellos parece como si dos chorros de fluido estuviesen chocando uno con otro. A estas trayectorias que parecen cruzarse justamente sobre el punto de silla se les denomina «separatrices». A los puntos de silla Poincaré los llamó puntos «homoclínicos», y a las separatrices, soluciones «doblemente asintóticas». Al final del capítulo se verá por qué.

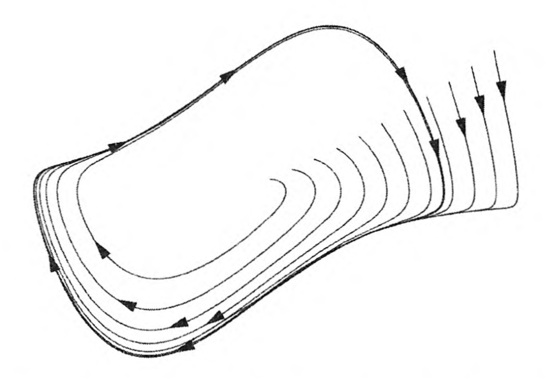


A la izquierda, un centro; a la derecha, un sumidero.



A la izquierda, una fuente; a la derecha, un punto de silla con sus dos separatrices, que en este caso son las dos rectas que se cruzan sobre el punto central.

En un teorema posterior, hoy llamado teorema de Poincaré-Bendixson (en honor del matemático sueco que completó la demostración), Poincaré demostró que, junto a los ciclos límite (las curvas cerradas que atraen a órbitas vecinas), sólo es posible esta clase de dinámica en el plano. No existe otro tipo de comportamiento en dos dimensiones que no sea el de «acercarse a» o «alejarse de» un punto singular y, en su caso, dar vueltas periódicamente (lo que define un ciclo, una curva cerrada). Como en dos dimensiones no hay nada más que centros, sumideros, fuentes, puntos de silla y ciclos límite, las trayectorias que son solución de la ecuación diferencial no tienen muchas alternativas: dar vueltas y más vueltas alrededor de un centro o de un ciclo límite, alejarse de una fuente, pasar cerca de un punto de silla o acercarse irremediablemente a un sumidero. Sus opciones se cuentan con los dedos de una mano.



Ciclo límite del oscilador de Van der Pol. Consiste en una curva cerrada (con trazo más grueso) que atrae todas las trayectorias vecinas.

En 1881, cuatro años antes de la convocatoria del concurso, Poincaré ya tenía en mente aplicar esta nueva teoría cualitativa al estudio del problema de los tres cuerpos y a la cuestión de la estabilidad planetaria. No en vano, como *leitmotiv* del artículo «Memoria sobre las curvas definidas por una ecuación diferencial», llegó a preguntarse: «¿Describe una curva cerrada el punto que se mueve? ¿Se mantiene siempre en el interior de cierta porción del plano? En otras palabras, y hablando en el lenguaje de la astronomía, nos hemos preguntado si la órbita es estable o inestable».

También años antes, en 1878, el astrónomo norteamericano George W. Hill había llamado la atención sobre la importancia de encontrar soluciones periódicas (curvas cerradas) en relación con la estabilidad. En efecto, un movimiento periódico (que se repite una y otra vez por siempre) nos proporciona un control muy útil sobre la estabilidad, porque sabemos que el móvil no podrá salirse nunca de su órbita para chocar con otro objeto ni escapar al infinito. De hecho, Hill había hallado una solución periódica para el problema de los tres cuerpos cuando la masa de uno de ellos es despreciable con respecto a los otros dos.

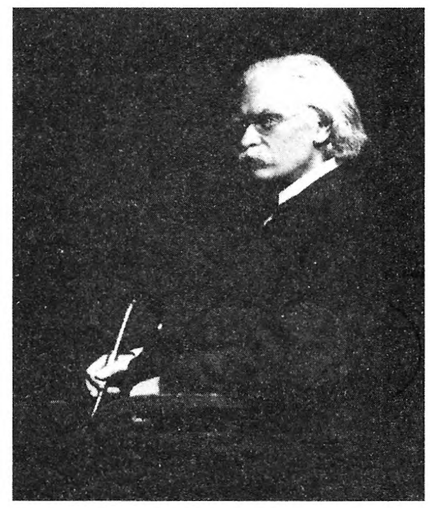
Estudiando el problema de Hill, que es un problema «restringido» de los tres cuerpos, en que un planeta ligero se mueve bajo la atracción gravitatoria de dos estrellas iguales confinadas en un mismo plano, Poincaré demostró que, al igual que el problema general de los tres cuerpos, éste no es resoluble aplicando los métodos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales (las cuadraturas) porque, a diferencia del problema de los dos cuerpos (resuelto de ese modo por Newton, Bernoulli y Euler), no todas las integrales del movimiento pueden ser resueltas con ayuda de las leyes de conservación (de la energía, del momento...). Dedujo, por tanto, que no hay una solución general explícita mediante funciones sencillas y conocidas.

A Poincaré sólo le quedaba un cartucho: el método de perturbaciones. Y aplicándolo, obtuvo soluciones en forma de series infinitas de potencias, pero, sin embargo, no era nada evidente que estas series (como las análogas ya obtenidas por Euler, Lagrange o Lindstedt) fueran convergentes, aunque satisficieran las ecuaciones del problema de los tres cuerpos. Definitivamente, el análisis le había abandonado a su suerte.

No fue hasta 1909, es decir, más de veinte años después, cuando el matemático Karl F. Sundman (1873-1949) por fin pudo proporcionar una solución general por medio de una serie convergente a este problema. Y aun así, esta solución es tan complicada y converge tan despacio que en la práctica resulta completamente inútil. Pero, a pesar de todo ello, si Sundman hubiera alcanzado este resultado veinte años antes, probablemente hubiera ganado el premio del rey Óscar II.

Así que, abandonado por el análisis, Poincaré pidió ayuda a la topología: «Abordando la cuestión desde otro punto de vista, demostraré rigurosamente la existencia de soluciones periódicas». Y como la estabilidad de las soluciones no podía verse examinando las series, recurrió a su teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales: ¿determinan estas soluciones curvas cerradas, es decir, soluciones periódicas? Si un móvil recorre una curva cerrada, es decir, un ciclo, antes o después tendrá que repetir el mismo movimiento, que será, por tanto, periódico. Pertrechado con esta nueva herramienta que él mismo alumbró fusionando análisis y topología, Poincaré probó la existencia de infinitas curvas cerradas y, por tanto, de infinitas soluciones periódicas.





A la izquierda, el rey Óscar II de Suecia y de Noruega; a la derecha, Gösta Mittag-Leffler. «Un rey pitagórico y un matemático platónico.»

And the winner is...

Al concurso del rey Óscar II se presentaron doce matemáticos con otros tantos trabajos, y de ellos sólo cinco trataban el problema de los tres cuerpos, pero ninguno daba con la solución pedida en forma de serie de potencias. Así, el 20 de enero de 1889, un día antes del sexagésimo cumpleaños del monarca, el distinguido jurado, con la aprobación del rey, declaró ganador a Poincaré por su «Memoria sobre el problema de los tres cuerpos y las ecuaciones de la dinámica»:

> «Esta Memoria no puede ser considerada como una solución completa al problema propuesto, pero es de tal importancia que su publicación inaugurará una nueva era en la historia de la mecánica celeste».

El resultado se publicó enseguida en la prensa internacional y Poincaré fue considerado poco menos que un héroe por la prensa francesa, que veía en su victoria el triunfo de la matemática francesa sobre la alemana, tradicionalmente considerada dominante.

Pero muy pronto la señal de que algo no iba bien se hizo patente. Cuando Mittag-Leffler, quien había tenido dificultades más que considerables para leer la larga memoria de Poincaré, hizo público el contenido de la misma, el astrónomo Hugo Gyldén, su némesis, no tardó —junto a Kronecker— en denunciar que el trabajo del matemático francés no iba más allá de uno suyo publicado en 1887.

No obstante, la situación se embrolló aún más cuando, meses más tarde, en julio de 1889, Poincaré se vio acosado por una retahíla de preguntas formuladas por Edvard Phragmén, editor de *Acta Mathematica*, quien estaba interesado en iluminar los pasajes más oscuros de la extensa «Memoria» de cara a su publicación. No sin motivo, Hermite escribió a propósito: «En este trabajo, como en casi todas sus investigaciones, Poincaré muestra el camino y da las indicaciones, pero deja mucho por hacer para cubrir las lagunas y completar su trabajo».

Además, a finales de noviembre, el propio autor descubrió un error muy grave en una parte de su trabajo, como se lo expresó a Mittag-Leffler en una carta fechada el 1 de diciembre:

> «He escrito esta mañana a Phragmén para comunicarle un error que he cometido y dudo que él te muestre mi carta. Pero las consecuencias de este error son más serias de lo que en principio pensaba. No es cierto que las soluciones doblemente asintóticas [las separatrices de los puntos de silla] sean curvas cerradas... y, por tanto, soluciones periódicas. Lo que sí es cierto es que las dos componentes de esta curva [cada una de las dos separatrices] se intersecan entre sí una cantidad infinita de veces. No voy a transmitirte el malestar que este descubrimiento me ha causado. Son necesarios bastantes cambios.»

Esta carta es, desde luego, el peor tipo de carta que puede recibir el editor de una revista y organizador de un premio, pues acarrea un serio desprestigio para el

jurado y los convocantes. La situación de Mittag-Leffler se hizo poco menos que insostenible. Intentó recuperar todas y cada una de las copias impresas de la memoria que ya circulaban, sin dar publicidad alguna al error de Poincaré, para que cuando éste se hiciera público el escándalo no le dañara demasiado. Así, una tirada completa, impresa pero no publicada, de la prestigiosa revista *Acta Mathematica* tuvo que ser destruida (de hecho, sólo se conserva un ejemplar del número original de la revista, que está celosamente guardado en una caja fuerte del Instituto Mittag-Leffler). Entre tanto, en sólo dos meses, diciembre de 1889 y enero de 1890, Poincaré revisó a toda prisa y corrigió por completo su trabajo, lo mandó a imprenta y lo pagó de su propio bolsillo, ya que había aceptado costear los gastos ocasionados. Se estima que pagó más de 3.500 coronas suecas, cifra que supera notablemente las 2.500 que había recibido como premio. Todo un ejemplo de honestidad intelectual.

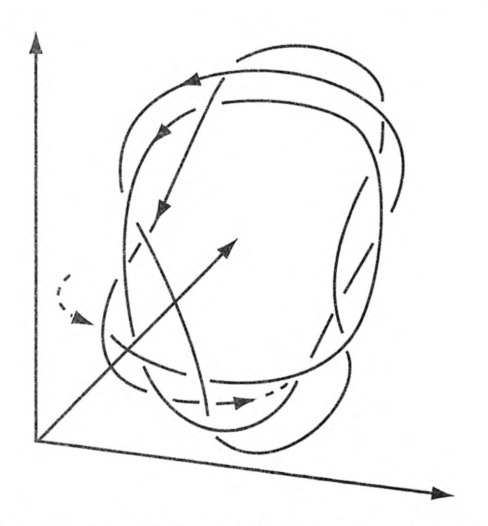
Un monstruo llamado Poincaré

¿En qué consistía exactamente el error de Poincaré? El matemático francés había anunciado el descubrimiento de una cantidad infinita de soluciones periódicas para el problema de los tres cuerpos, pero, como reconoció más tarde en su carta, resultaba que algunas de ellas no eran periódicas, porque no definían curvas cerradas. De hecho, a partir de este grave error, Poincaré pudo descubrir que las trayectorias doblemente asintóticas, las separatrices de los puntos de silla (o puntos homoclínicos, como él los bautizó), determinaban órbitas caóticas.

Veámoslo con más detalle. En el plano, en dos dimensiones, Poincaré y Bendixson pudieron demostrar su tranquilizador teorema porque el plano presenta propiedades especialmente buenas. Como las trayectorias en el plano de fases no pueden cortarse, hay muy pocos comportamientos válidos; de hecho, como ya vimos antes, son básicamente cinco: acercarse a o alejarse de un punto singular, sea sumidero, fuente o punto de silla, y dar vueltas periódicamente en torno a un centro o a un ciclo límite.

En cambio, en el caso de tres cuerpos moviéndose bajo interacción gravitacional mutua (problema de los tres cuerpos), nos hallamos ante un problema en el espacio, en tres dimensiones, lo que permite una mayor combinatoria o virtualidad. En el espacio de fases, las cosas son aún mucho más complejas: las trayectorias no necesitan cortarse entre sí para generar grandes quebraderos de cabeza, les basta con anudarse. En el plano no hay nudos, pero en el espacio, sí. Además, cuando hay más de dos dimensiones el sistema puede presentar atractores muy distintos a los puntos singu-

lares atractivos (los sumideros) y los ciclos límite. Como veremos en el próximo capítulo, aparecen los «atractores extraños», que comúnmente asociamos con el caos.

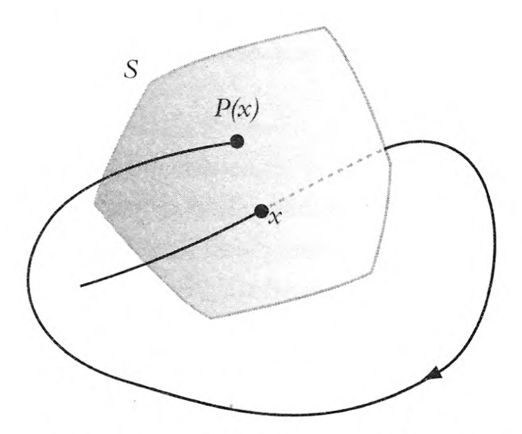


En el espacio tridimensional las trayectorias-solución pueden anudarse entre sí.

Pero ¿cómo se las arregló Poincaré para detectar las soluciones periódicas en el espacio? Pues aplicando el método conocido hoy día como de las «secciones de Poincaré». Ya que en el plano la dinámica es más fácil de estudiar que en el espacio, se le ocurrió considerar un plano contenido en el espacio de fases que seccionara por completo al manojo tridimensional de trayectorias. Es decir, algo muy parecido a lo que hacemos diariamente cuando queremos saber si una manzana tiene o no un gusano dentro: cortamos la manzana con un cuchillo y observamos el corte transversal, la sección. Aunque lo vamos a explicar con otro ejemplo menos truculento.

Supongamos que una persona cualquiera se presta a transportar durante todo un día, de sol a sol, un carrete de hilo, de modo que allá por donde pase irá dejando hilo. Pues bien, ese hilo no será más que un indicador de la trayectoria que ha seguido esa persona. Pero, supongamos ahora que, por un imprevisto, perdemos la pista de ese individuo y no sabemos si ha regresado o no a su casa. ¿Cómo podríamos averiguar si está ya en casa sin necesidad de seguir todo el hilo hasta llegar al carrete y a la persona? Aquí el enfoque topológico de Poincaré viene en nuestra ayuda: el plano en que se encuentra la puerta de su casa va a ser nuestra sección de

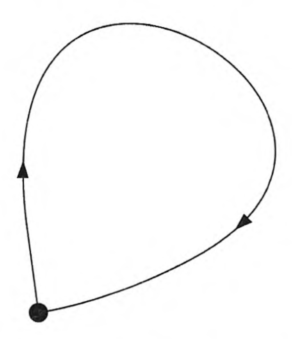
Poincaré. Situémonos ante su puerta y contemos el número de hilos que atraviesan el marco de la puerta. Si hay un número impar, la persona todavía no está en casa. Sin embargo, si hay un número par, hemos tenido suerte, porque ya está dentro. (Lógicamente, si está en casa, siempre que ha salido ha regresado y, por tanto, tiene que haber una cantidad par de hilos atravesando el marco de la puerta, nuestra sección de Poincaré.) Es decir que, en resumen, el estudio de los hilos (de las trayectorias) que atraviesan una superficie como el marco de una puerta (la sección de Poincaré) es realmente informativo.



Sección S de Poincaré. Si x *y* P(x) *hubieran coincidido, la trayectoria sería una curva cerrada y, por tanto, una solución periódica.*

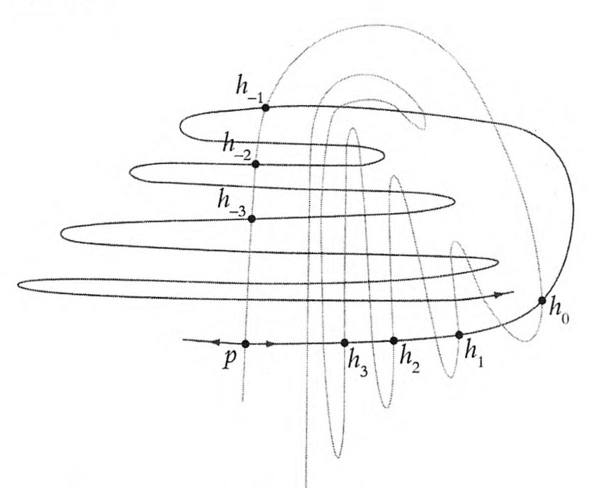
En general, Poincaré reparó en que la periodicidad de una solución puede detectarse, empleando una sección de Poincaré, si se comprueba que la curva acaba regresando exactamente al punto de partida en que atravesó la sección transversal. La sección de Poincaré del espacio de fases captura, por tanto, aspectos cruciales de las soluciones de la ecuación diferencial (incluyendo nociones de estabilidad).

En esencia, el matemático francés pensaba que la dinámica que iba a dibujarse en cada sección iba a ser una dinámica bidimensional típica, no demasiado complicada, en la que las trayectorias sólo podrían cruzarse en puntos singulares, en los puntos de silla, pero descubrió, con horror, que las separatrices de los puntos de silla (las dos trayectorias que entrechocaban sobre el punto homoclínico), pese a que se cortan entre sí, no coinciden, sino que son dos curvas distintas que están obligadas a volver a cruzarse una y otra vez, formando una reja constituida por una infinidad de puntos de intersección. La dinámica tridimensional que se proyectaba en cada sección mostró una complejidad inimaginable en principio.



El error de Poincaré: creer que la separatriz inestable (la que se aleja del punto de silla) y la estable (la que se acerca) coinciden, son la misma curva.

Así pues, la clave radica en que, mientras que la estructura local de un punto de silla es sencilla porque es lineal, la estructura global no tiene por qué serlo, porque es no lineal. Es más, puede ser extraordinariamente compleja, y he aquí la razón de los movimientos caóticos. La estructura global de las separatrices o soluciones doblemente asintóticas (como las llamaba Poincaré, porque van de un punto singular a otro punto singular) puede ser, como se ha dicho, muy enrevesada. En el caso del problema de los tres cuerpos, ambas separatrices están forzadas a entrecruzarse una y otra vez, indefinidamente. Es el «enredo homoclínico», el gran descubrimiento de Poincaré, una figura de una complejidad tal que el propio autor no se atrevió a dibujarla ni casi a describirla. De hecho, es la causa del caos y de que el sistema carezca de integrales analíticas.

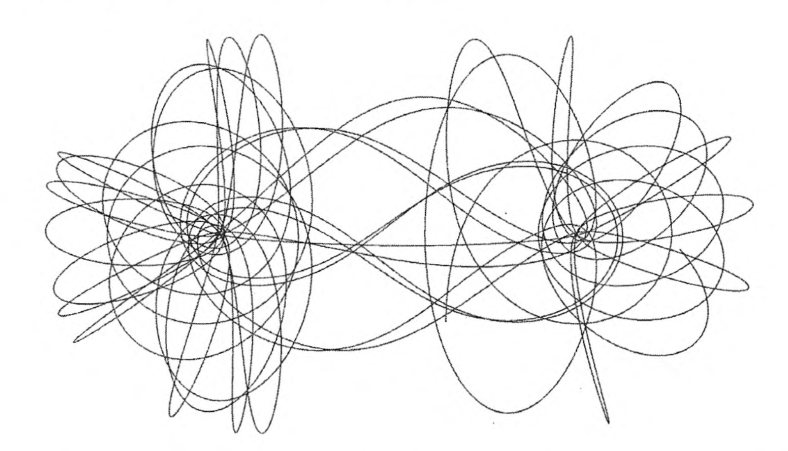


Enredo homoclínico: p *es el punto de silla, y* h_0, h_1, h_2..., *los infinitos puntos homoclínicos de corte entre las dos separatrices.*

Posteriormente, en su monumental ensayo *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste (Los nuevos métodos de la mecánica celeste)*, publicado en tres volúmenes entre 1892 y 1899, Poincaré dio cabida a la primera descripción matemática del comportamiento caótico en un sistema dinámico en relación con las órbitas homoclínicas:

> «Cuando uno intenta dibujar la figura formada por estas dos curvas y su infinidad de intersecciones, donde cada una de las cuales corresponde a una solución doblemente asintótica, estas intersecciones forman una especie de red, de tela de araña, o malla infinitamente fina y enredada. Ninguna de las dos curvas puede tan siquiera cortarse a ella misma, sino que debe plegarse sobre sí de un modo muy complicado para poder cruzar una infinidad de veces los enlaces del entramado. Uno siente vértigo ante la complejidad de esta figura que ni siquiera me atrevo a pintar. Nada puede darnos una idea mejor de la complejidad del problema de los tres cuerpos».

Los enredos homoclínicos son la impronta del caos, y las más de 200 páginas de la memoria premiada y corregida de Poincaré constituyen, desde luego, el primer manual o libro de texto sobre la teoría del caos. «Parece —le describe Hermite, en carta a Mittag-Leffler— como un vidente a quien las verdades se le aparecen con una luz intensa, pero fundamentalmente a él solo.»



Órbita caótica en el problema restringido de los tres cuerpos. Si en vez de vivir girando en torno a un sol simple viviéramos en un pequeño planeta que gira alrededor de una estrella doble, Kepler se habría visto obligado a abandonar su propósito de encontrar leyes regulares para el movimiento de los planetas, porque éstos giran en torno a cada estrella con periodos que no siguen ninguna pauta regular.

En conexión con esto, Poincaré contribuyó como pocos a popularizar la idea de que existen sistemas dinámicos deterministas cuya predicción resulta imposible para el investigador. Las trayectorias-solución de una ecuación diferencial pueden estar tan enmarañadas entre sí que cualquier pequeño error al seleccionar la trayectoria correcta, la que resuelve nuestro problema, puede hacer que nos equivoquemos de trayectoria y sigamos otra que nos lleve a un lugar o estado final completamente distinto. En 1908, en *Ciencia y método*, tomando como base el problema de los tres cuerpos y, de forma curiosa, la previsión del tiempo meteorológico, Poincaré concluyó:

> «Si conociésemos exactamente las leyes de la naturaleza y la situación del universo en el instante inicial, podríamos predecir con exactitud la situación del universo en un instante ulterior. Pero, aun cuando las leyes naturales no guardaran más secretos para nosotros, no podemos conocer la situación inicial más que "aproximadamente". Si esto nos permite predecir la situación ulterior "con la misma aproximación", que es todo lo que necesitamos, decimos que el fenómeno ha sido predicho, que está regido por leyes. Pero no acaece siempre así: puede suceder que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan algunas muy grandes en los fenómenos finales. Un pequeño error al inicio engendrará un error enorme al final. La predicción se vuelve imposible».

Además, pocos meses antes de su muerte, en 1911, a su regreso del Congreso Solvay, donde conoció de manos de Max Planck la teoría cuántica (que junto con la teoría del caos son las dos grandes fisuras del determinismo y la predictibilidad), Poincaré se mostró así de preocupado:

> «Parece innecesario señalar cómo estas ideas difieren de las concepciones tradicionales; los fenómenos físicos dejarán de obedecer a leyes expresables por ecuaciones diferenciales y esto, indudablemente, será la mayor y más radical revolución en la filosofía natural desde los tiempos de Newton».

Al preguntarse si las ecuaciones diferenciales son o no el instrumento adecuado para la formulación matemática de las leyes físicas, el genial Poincaré no estaba sino expresando, tal y como lo haría un matemático, sus dudas sobre la validez del determinismo.

Newton había vestido el determinismo o la ley de causalidad con un ropaje matemático: las leyes de Newton eran ecuaciones diferenciales. La mecánica clásica había conseguido, gracias al desarrollo de toda una serie de técnicas de cálculo por parte de los matemáticos, un gran poder predictivo. Pero ahora Poincaré había mostrado que algunos sistemas mecánicos podían presentar un movimiento tan complejo, tan caótico, que su predicción es imposible. Y para rizar el rizo, resultaba que no sólo la capacidad científica de predecir presentaba límites, sino que los propios físicos cuánticos estaban poniendo en cuestión la vestimenta matemática del determinismo: las ecuaciones diferenciales. Con el avance del siglo XX ambas revoluciones (la de la teoría del caos y la de la mecánica cuántica) quedaron firmemente asentadas.

JAMES CLERK MAXWELL, ENTRE EL CAOS Y EL ELECTROMAGNETISMO

Influido por las observaciones de los ingenieros franceses Saint-Venant y Boussinesq, el 11 de febrero de 1873 el célebre físico de origen escocés James Clerk Maxwell (1831-1879) pronunció en Cambridge una conferencia sobre el determinismo en la que mostraba hasta qué punto era conocedor —al igual que Poincaré— de que lo que hoy se conoce como «efecto mariposa» o «dependencia sensible a las condiciones iniciales» como una huella del caos:

> «Mucha luz puede arrojarse sobre algunas de estas cuestiones considerando la estabilidad y la inestabilidad. Cuando el estado de las cosas es tal que una variación infinitamente pequeña del estado presente altera tan sólo en una cantidad infinitamente pequeña el estado en un momento futuro, se dice que la condición del sistema, esté en reposo o en movimiento, es estable; pero cuando una variación infinitamente pequeña del estado presente puede causar una diferencia finita en el estado del sistema en un tiempo finito, se dice que la condición del sistema es inestable. Es evidente que la existencia de condiciones inestables hace imposible la predicción de acontecimientos futuros si nuestro conocimiento del estado presente es sólo aproximado y no exacto.
>
> »Si, en consecuencia, los cultivadores de la ciencia física, buscando el arcano de la ciencia, son llevados al estudio de las singularidades y las inestabilidades, mejor que de las continuidades y las estabilidades de las cosas, entonces la promoción del conocimiento natural podría tender a cambiar el prejuicio en favor del determinismo que parece surgir de asumir que la ciencia física del futuro será una mera imagen magnificada de la del pasado.»

Hoy, un siglo después, el adelanto de Poincaré con respecto a sus coetáneos nos sigue maravillando. Nunca un error matemático, aunque fuera en mitad de un concurso, fue tan providencial ni tan fructífero. Y por todas esas contribuciones se lo considera frecuentemente el abuelo de la teoría del caos. Si Poincaré colocó los cimientos, Smale y Lorenz, mucho más tarde, terminaron de construirla, por lo que se convirtieron, junto con otros, en los padres de dicha teoría. Pero no adelantemos acontecimientos...

Firma de Henri Poincaré.

Capítulo 2

La historia del redescubrimiento del caos

—Usted no es un caso normal.
—¿No?
—No.
—¿Pues qué soy?
—Un caso de estudio.
—Yo seré un caso de estudio; pero nadie me quiere estudiar.
Pío Baroja, *El árbol de la ciencia*

Nadie conoce ni ha conocido nada nuevo de inmediato. Lo que creemos conocer de pronto, en realidad ha estado largo tiempo con nosotros. Quizá, a la manera del caos, de una forma casi clandestina, sin salir a la luz porque ningún científico ha querido enfrentarse cara a cara con algo que no parecía muy prometedor. Esto viene a cuento de una anécdota protagonizada por un físico norteamericano que resume a las mil maravillas por qué la ruta hacia el caos descubierta por Poincaré quedó prácticamente inexplorada durante casi medio siglo, entre principios y mediados del siglo XX, por lo que tuvo que ser redescubierta.

Doyne Farmer, un físico y matemático famoso en Estados Unidos por haber vencido a las ruletas de los casinos de Las Vegas con ayuda de una ecuación diferencial no lineal, cuenta su experiencia como estudiante de matemáticas de la siguiente manera:

«*No-lineal* era una palabra que únicamente te encontrabas al final del libro. Un estudiante de ciencias físicas seguía un curso de matemáticas y la última lección era la dedicada a las ecuaciones no lineales. Frecuentemente uno se saltaba el tema y, si lo daba, todo lo que aprendía consistía en reducir las ecuaciones no lineales a ecuaciones lineales, buscando soluciones aproximadas. Era un ejercicio frustrante. No teníamos ni idea de las grandes diferen-

cias que la no linealidad produce en un modelo. No sabíamos que una ecuación no lineal puede evolucionar de un modo aparentemente aleatorio. Y si observabas algo parecido, te decías: "¿De dónde procede este movimiento aleatorio? Yo no lo veo en las ecuaciones"».

No obstante, entre Poincaré y los nuevos teóricos del caos que aparecerán en las siguientes páginas, hubo algunos otros matemáticos y físicos excepcionales que por aquel entonces (estamos hablando de los últimos años del siglo XIX y de principios del siglo XX) también estudiaron los trabajos del francés sobre ese *ménage à trois* tan productivo que fue el problema de los tres cuerpos. Estos exploradores del caos siguieron la llamada a rebato de Poincaré sobre abordar los problemas no lineales y dieron lugar a nuevos descubrimientos en otros campos afines. Uno de dichos exploradores fue Jacques Hadamard. Aunque desde antaño venían rodando diversos

LIVING LAS VEGAS

Doyne Farmer y Norman Packard, dos estudiantes graduados en física, fundaron a finales de la década de 1970 un pequeño grupo denominado Eudaemonic Enterprise, cuya meta era encontrar una manera de ganar a la ruleta y así conseguir dinero para financiar una comunidad científica. Estudiando una ruleta que habían comprado, formularon una ecuación que involucraba el periodo de rotación de la ruleta y el periodo de rotación de la bola alrededor de aquélla. Como los cálculos para resolver la ecuación eran muy laboriosos, decidieron construir un minicomputador que predijera en qué octante de la ruleta caería la bola. El computador era lo suficientemente pequeño como para llevarlo escondido en la suela del zapato, y el usuario conocía la predicción a que debía apostar gracias a tres solenoides que vibraban e iban ocultos bajo la ropa, amarrados al torso.

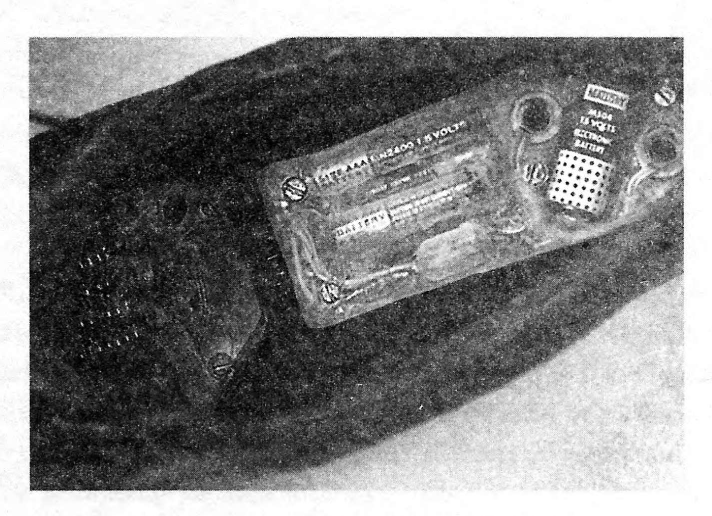
En 1978, el grupo fue a Las Vegas dispuesto a ganar dinero. Mientras que el observador suministraba los datos al computador, la chica que hacía la apuesta recibía la predicción bajo su falda. Lograron una ganancia promedio del 44% de lo apostado. Pero la aventura no estuvo libre de imprevistos. Una de las noches de juego el aislamiento eléctrico falló y la apostadora recibió descargas eléctricas de los solenoides, que le quemaron la piel, aunque siguió jugando estoicamente. Al final, de forma colectiva, ganaron cerca de 10.000 dólares. Lo habían logrado: podían predecir estadísticamente en qué parte de la ruleta quedaría la bola.

Pero cuidado: no estamos hablando de una experiencia fácil ni extrapolable a todas las ruletas. En condiciones ideales, una bola perfecta y una circunferencia de ruleta perfecta actuarían

ejemplos de sistemas caóticos, Hadamard fue quien ofreció, en 1898, la primera demostración matemática de que, para ciertos sistemas dinámicos, un pequeño cambio en la condición inicial provoca un gran cambio en la posterior evolución del sistema y, por tanto, en el estado final (lo que hoy llamamos efecto mariposa). Este matemático francés estudió una especie de billar alabeado (curvado, no plano, con forma de silla de montar) en el que las trayectorias de las bolas son altamente inestables, en el sentido de que dos bolas colocadas inicialmente próximas tienden, tras el golpe que las pone en movimiento, a separarse muchísimo (de hecho, exponencialmente) con el tiempo. Y probó, para este sistema y otros análogos, un teorema de sensibilidad a las condiciones iniciales.

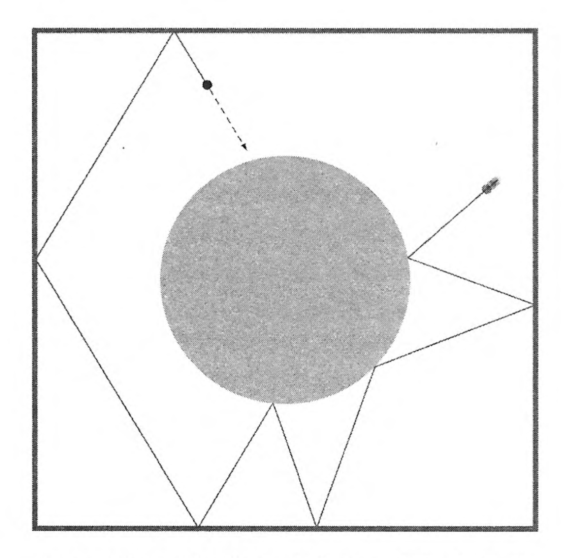
Bastante tiempo después, en la década de 1970, el matemático soviético Yákov Sinái (n. 1935) retomó las investigaciones de Hadamard y, en vez de tomar como base una mesa de billar alabeada, se le ocurrió estudiar el movimiento de las bolas

de modo matemático y no habría predicción posible. Si los «eudaemons» podían predecir estadísticamente en qué parte de la ruleta caería la bola era porque habían estudiado las imperfecciones de esa ruleta. La predicción, en periodos cortos, emergía de la aleatoriedad debido a la imperfección de los materiales. Podían anticipar algunos resultados porque la ruleta no era perfecta.



El computador de zapato de los «eudaemons».

sobre una mesa de billar plana, cuadrada, en la que había depositado varios obstáculos con forma de disco. Pues bien, este matemático demostró que su billar poseía la misma propiedad que el billar de Hadamard, ya que los obstáculos también ocasionaban la dispersión caótica de las bolas.



Trayectoria errática de una bola en un billar de Sinái.

Otro hito lo marca un antiguo compañero de estudios de Jacques Hadamard con el que Poincaré incluso tuvo algún que otro rifirrafe metafísico. Nos referimos al físico francés Pierre Duhem (1861-1916), cuyo ferviente catolicismo le llevaba a dar prioridad filosófica a la religión frente a la ciencia, opción que el convencido racionalista Poincaré sólo podía rechazar. Duhem atendió a las importantes repercusiones filosóficas que se derivaban de los resultados probados por ambos, atisbando lo que de revolucionario se escondía tras sus trabajos.

En el apartado «Ejemplo de deducción matemática que no se puede utilizar nunca» de su obra *La théorie physique: son objet et sa structure* (*La teoría física, su objeto y estructura*), publicada en 1906, Duhem reparaba en que la predicción a largo plazo de la trayectoria de las bolas en el billar de Hadamard es completamente gratuita, vana, por cuanto cualquier pequeña incertidumbre en la medición de la posición y la velocidad iniciales de la bola dará lugar a una predicción espuria, sin valor. La trayectoria predicha nada tendrá que ver con la trayectoria real. Leemos en el libro de Duhem:

EL ABUELITO HADAMARD

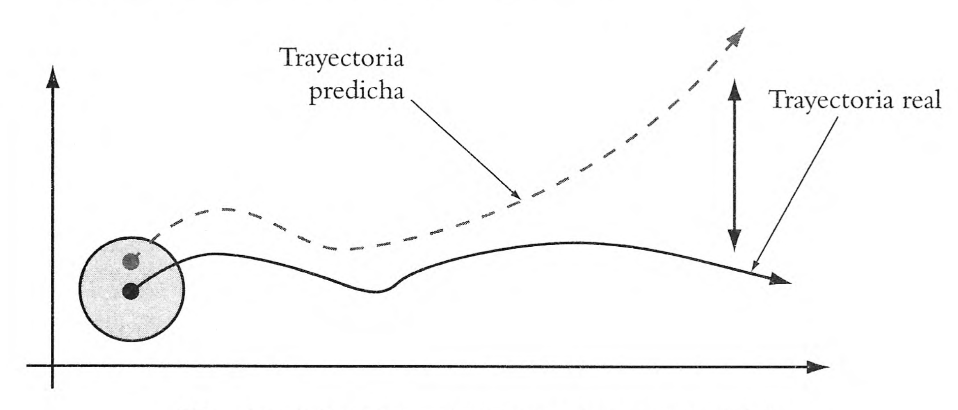
Jacques Salomon Hadamard (1865-1963), científico galo de orígenes judíos a quien la aritmética se le atragantaba de niño, ocupó el sillón de Poincaré en la Académie des sciences francesa a la muerte de éste. Hadamard fue el patriarca de la matemática parisina, primero como profesor de instituto (parece ser que no muy bueno, pues no se le entendía y los alumnos protestaban) y después como profesor universitario (aunque generalmente era el único interesado en los temas matemáticos que investigaba).

Un ejemplo de su legendaria capacidad para el despiste es el hecho de que, durante la Segunda Guerra Mundial, con los nazis dominando Francia, se dejara olvidado en su casa de París el visado para emigrar a Estados Unidos. Una vez allí, recién llegado, como tenía que ganarse otra vez la vida de algún modo, a sus 79 años se dirigió a una universidad donde le recibió un profesor que no entendió su nombre. «Mire, soy aquel de allí», le dijo señalando su retrato de entre una serie de fotografías colgadas en la pared. Cuando una semana después regresó esperando contestación, le respondieron que no le daban trabajo y pudo ver que su foto había desaparecido sin dejar rastro. Próximo al comunismo, hay quienes opinan que fue el autor de los teoremas matemáticos que posteriormente se publicaron en la antigua Unión Soviética y se adjudicaron a Karl Marx.



«Las investigaciones de Hadamard nos proporcionan un ejemplo muy representativo de este tipo de deducción que siempre es inútil. El ejemplo procede de uno de los problemas más simples que estudia la menos compleja de las teorías físicas, la mecánica. Una masa material se desliza sobre una superficie sin que incida sobre ella ninguna gravedad ni fuerza alguna, y sin que ningún rozamiento obstaculice su movimiento. Si nuestro punto material se mueve sobre una superficie cualquiera, describe una línea que los geómetras denominan "línea geodésica" de la superficie considerada. Las investigaciones de Hadamard tratan concretamente de las geodésicas de las superficies de curvatura negativa. Si se conoce con total exactitud la posición inicial de un punto material y la dirección de la velocidad inicial, la línea geodésica que

seguirá ese punto en su movimiento estará determinada sin ninguna ambigüedad. Otra cosa sería si las condiciones iniciales no se dieran matemáticamente, sino de manera práctica. La posición inicial de nuestro punto matemático ya no será un punto determinado sobre una superficie, sino un punto cualquiera tomado en el interior de una pequeña mancha; la dirección de la velocidad inicial ya no será una recta definida sin ambigüedad, sino una cualquiera de las rectas que comprende un estrecho haz. A pesar de estos estrechos límites, siempre se pueden tomar estos datos prácticos de tal manera que la geodésica real se aleje de la geodésica predicha que hemos elegido de antemano. Por mucho que se aumente la precisión con la que se determinan los datos prácticos, por ejemplo que se haga más pequeña la zona donde se encuentra la posición inicial del punto material o que se estreche el haz que comprende la dirección inicial de la velocidad, la geodésica que se mantiene a distancia finita jamás podrá ser liberada de esas compañeras infieles que se separan indefinidamente. Si los datos vienen determinados por procedimientos físicos, por muy precisos que se suponga que son, la pregunta planteada sigue y seguirá siempre sin respuesta».



Si hay caos, la trayectoria real del sistema y la trayectoria predicha divergen a medio o largo plazo.

Además, justo después de este pasaje, Duhem pasaba a discutir otro problema cuya semejanza con el de Hadamard era evidente: el problema de los tres cuerpos. Haciéndose eco de las investigaciones de Poincaré, Duhem señalaba que el enredo entre trayectorias estables e inestables bien puede significar que no seamos capaces de establecer fuera de toda duda si la trayectoria de los planetas es estable o inestable. Con sus propias palabras:

> «El problema de los tres cuerpos es para los geómetras un terrible enigma. Si se conoce en un momento dado y con una precisión matemática la posición y la velocidad de cada uno de los astros que componen el sistema solar, se puede afirmar que cada astro sigue una trayectoria perfectamente definida. El geómetra puede, entonces, plantearse esta pregunta: ¿seguirán estos astros girando indefinidamente alrededor del Sol? O, por el contrario, ¿llegará el día en que uno de estos astros acabe apartándose del grupo de sus compañeros para ir a perderse en la inmensidad? Esta cuestión constituye el problema de la estabilidad del sistema solar, que Laplace había creído resolver, y cuya extraordinaria dificultad han puesto de relieve los geómetras modernos, especialmente Poincaré. Pero puede ocurrir que los datos prácticos que el astrónomo proporciona al geómetra equivalgan, para éste, a una infinidad de datos teóricos muy próximos unos a otros, pero sin embargo distintos. Y que, entre esos datos, haya algunos que mantengan eternamente todos los astros a una distancia finita, mientras que otros lancen hacia la inmensidad alguno de esos cuerpos celestes. Si se presentara aquí una circunstancia análoga a la que se presenta en el problema estudiado por Hadamard, cualquier deducción matemática referente a la estabilidad del sistema solar sería para el físico una predicción inutilizable».

Sin embargo, a pesar de la larga sombra de Poincaré entre los matemáticos franceses, durante buena parte del siglo XX no hubo intentos serios de investigar a fondo el comportamiento de las órbitas y de los enredos homoclínicos, caóticos.

Hay dos buenas razones que explican este sorprendente largo intervalo transcurrido entre las ideas de Poincaré y el moderno estudio del fenómeno del caos. La primera es el descubrimiento de la mecánica cuántica, que conmocionó el mundo científico y concentró las energías de varias generaciones de físicos y matemáticos. Si la mecánica cuántica hace intervenir el azar de una forma nueva e intrínseca, ¿para qué molestarse en introducir el azar en la mecánica clásica mediante la sensibilidad a las condiciones iniciales? Pero es que el azar ya estaba allí, sólo que olvidado. La segunda razón es que las ideas de Poincaré, Hadamard y Duhem llegaron demasiado pronto, cuando todavía no había medios para explotarlas. Sólo con el advenimiento de los modernos ordenadores ha sido posible realizar los complejos cálculos y el análisis numérico que sus resultados demandaban. Obviamente, los ordenadores, que han jugado un papel esencial en la teoría del caos, no existían a comienzos del siglo XX.

MAX BORN (1882-1970), A VUELTAS CON EL CAOS



Este célebre físico, padre de la mecánica cuántica, volvió a poner de relieve en 1955 el papel que la dependencia sensible a las condiciones iniciales desempeña en la física. Born se preguntaba si la mecánica clásica era, de hecho, determinista. Para responderse, discutió el modelo de gas altamente inestable propuesto por H.A. Lorentz en 1905 para explicar la conductividad de los metales. En esencia, cada partícula del gas de Lorentz se comporta como una bola del billar de Hadamard-Sinái, puesto que esa partícula (pongamos por caso un electrón), al moverse y chocar con un conjunto de obstáculos (por ejemplo, los átomos del cuerpo metálico), experimenta múltiples desviaciones, de modo que la más mínima diferencia en las condiciones iniciales termina por producir dos estados ulteriores completamente diferentes. De nuevo, si la posición y la velocidad de la partícula se conocieran de un modo muy preciso, entonces el estado en otros instantes (antes o después) podría predecirse con exactitud. Sin embargo, esto sólo ocurre cuando es posible realizar una medida totalmente precisa de la posición y de la velocidad.

En su discurso al recibir el Premio Nobel de Física en 1954, Born puso otro ejemplo muy ilustrativo: pensemos en una partícula que se mueve sin fricción en una línea recta entre dos paredes con las que experimenta un choque completamente elástico. Se mueve con velocidad constante igual a su velocidad inicial hacia delante y hacia atrás, y se puede saber de modo exacto dónde estará en cualquier momento si se conoce de modo preciso su velocidad. Pero si se permite una pequeña imprecisión en la medida de la velocidad, la incertidumbre en la predicción de la posición en cualquier instante posterior aumentará con el tiempo. Si uno espera el tiempo suficiente, la imprecisión se habrá convertido en la distancia total entre las paredes. Por tanto, es imposible predecir nada acerca de la posición en un tiempo lo suficientemente largo, a largo plazo. El efecto de la dependencia sensible a las condiciones iniciales es una suerte de indeterminismo clásico.

Los sucesores de Poincaré en América

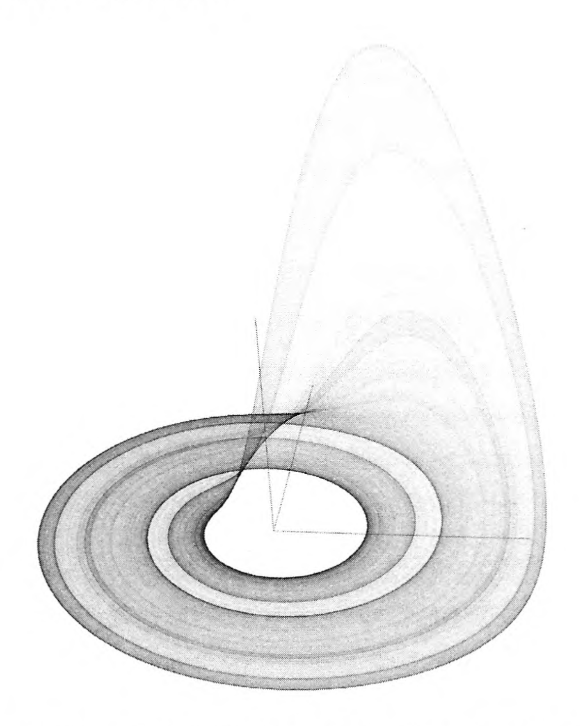
Con el paso de los años, entrado el siglo XX, dos fueron las tradiciones que continuaron la obra de Poincaré: a un lado del océano, la tradición norteamericana de Birkhoff y Smale, y al otro lado del telón de acero, la tradición soviética encabezada por Kolmogorov y Arnold, deudora de Liapunov. Por tanto, la influencia del matemático francés no desapareció completamente, aunque sus ideas sobre los puntos homoclínicos tardaron en recibir continuación y estuvieron perdidas durante lustros.

En los estudios de George David Birkhoff (1884-1944), el conocimiento de la obra de Poincaré se deja notar a propósito de las características cualitativas de las ecuaciones diferenciales. En su libro *Dynamical Systems* (*Sistemas dinámicos*), publicado en 1927 y donde aparece por vez primera el término «sistema dinámico», este matemático afincado en Estados Unidos desarrolló la teoría de dichos sistemas y fue aún más allá que el matemático francés en el análisis de las curvas definidas por ecuaciones diferenciales; es decir, recogió el testigo de Poincaré y extendió sus ideas en nuevas direcciones.

También dentro del contexto norteamericano destaca con gran talla la figura de Stephen Smale (n. 1930), quien ganó la Medalla Fields —el máximo galardón de los matemáticos menores de 40 años— en 1966 por su gran contribución a la teoría de los sistemas dinámicos. Smale se encuentra justo en la confluencia de las tres tradiciones más pertinentes en el estudio de estos sistemas y del caos, a saber: la tradición olvidada que venía desde Poincaré pasando por Birkhoff; la escuela rusa, volcada al inglés por Lefschetz durante la Guerra Fría, y, en tercer lugar, el estudio analítico-topológico de las ecuaciones diferenciales llevado a cabo por Mary Lucy Cartwright (1900-1998) y John Edensor Littlewood (1885-1977) en Gran Bretaña a partir de los trabajos de Van der Pol.

Balthasar van der Pol (1889-1959) era un ingeniero electrónico holandés que en los felices años veinte encontró un ciclo límite —ya hemos visto representado este concepto en el capítulo 1— en una ecuación diferencial no lineal que describía el funcionamiento de los tubos de vacío y de las válvulas electrónicas, y que resultaba realmente importante por su aplicación en las telecomunicaciones. Había una trayectoria-solución de la ecuación con forma de curva cerrada que atraía a todas las trayectorias vecinas. Pues bien, en 1945, en mitad del esfuerzo bélico aliado en el radar, Cartwright y Littlewood demostraron que en el entorno de este ciclo límite se presentaba un complicado movimiento aperiódico... ¡Era, otra vez, el caos!

Algo más tarde, en la década de 1950, el topólogo Stephen Smale seguía estudiando el comportamiento cualitativo de los sistemas dinámicos en busca de un teorema para el espacio de tres dimensiones análogo al de Poincaré-Bendixson para el plano, pero no lo encontró. Y había una buena razón para ello: era, y sigue siendo, imposible, ya que las trayectorias en el espacio pueden anudarse, y esto complica extraordinariamente la dinámica. Hay sistemas dinámicos tridimensionales que, aparte de sumideros, fuentes, centros, sillas de montar y ciclos límite, presentan atractores extraños (por decirlo empleando un anacronismo para la época). Lamentablemente para Smale, el caos existía.

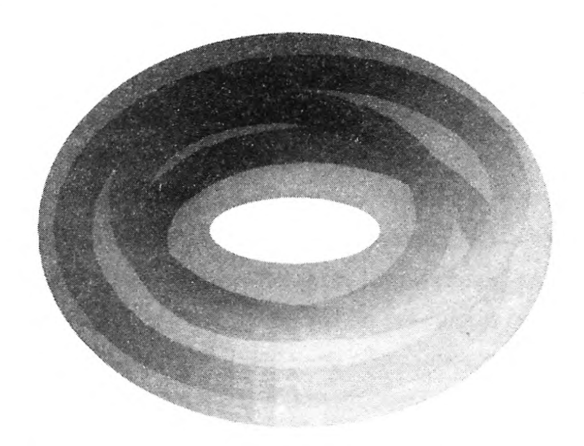


Atractor extraño de Rössler (1976). Al igual que la banda de Möbius, sólo tiene una cara, pese a que parece que tiene dos: basta seguir el borde externo para ver que se convierte en el borde interno.

Al principio, Smale pensaba que casi todos, por no decir todos, los sistemas dinámicos tridimensionales presentaban un comportamiento no muy extraño, más o menos similar al de los sistemas dinámicos bidimensionales, del plano, que sólo presentan como atractores (un término muy descriptivo) una colección finita de sumideros y de ciclos límite. Su interés por los atractores radicaba en que éstos de-

terminan el comportamiento a largo plazo del sistema dinámico, indican qué va a hacer el sistema en el futuro distante, dado que éste sentirá por el atractor una especie de atracción fatal, inevitable, allá por el infinito. Y Smale creía que los únicos movimientos válidos a largo plazo eran o bien estar en reposo o en equilibrio en un estado estacionario (en un sumidero), o bien repetir alguna serie de movimientos periódicamente. En otras palabras: permanecer quieto o dar vueltas y más vueltas. A la larga, puntos o círculos.

Pero, cuál no sería su sorpresa cuando, estando en las playas de Río de Janeiro, recibió por carta un contraejemplo a su conjetura. Norman Levinson, un colega matemático del Massachusetts Institute of Technology (MIT), le hizo llegar un sistema dinámico como el que daba origen al oscilador no lineal de Van der Pol, que había sido estudiado por Cartwright y Littlewood, con una cantidad infinita de órbitas periódicas y, lo que era aún peor, con una serie de comportamientos a largo plazo en su vecindad de lo más extraño: en principio era posible que en el futuro el sistema no permaneciera en reposo o dando vueltas y más vueltas, sino que continuara moviéndose de una forma totalmente errática. Geometrizando el trabajo analítico de Levinson, Smale dio primero, en 1959, con el «solenoide de Smale» (llamado así por su parecido con el aparato en que se enrollan kilómetros de cobre alrededor de un núcleo de metal para hacer un electroimán) y, en segundo lugar, ya en la década de 1960, con la «herradura de Smale», cuya dinámica complicadísima es similar a la del sistema apuntado por Levinson. Dos atractores de lo más extraño.



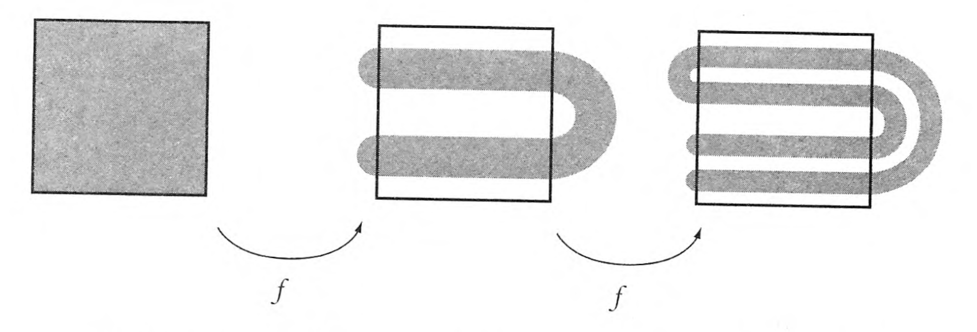
Solenoide de Smale, consistente en el triple enrollamiento de un toro o donut dentro de otro gracias a la cuarta dimensión.

La construcción del solenoide y, en especial, de la herradura de Smale fue un paso importante en la comprensión de la relación entre la existencia de una órbita homoclínica y la presencia del comportamiento aperiódico e inestable, el conocido más tarde como caos determinista. Smale demostró que la existencia de puntos homoclínicos implica la existencia de una herradura, una forma que pasa por ser el paradigma de los mecanismos topológicos de estiramiento y plegado, que, como se explicará en el capítulo 3, dan lugar al caos.

Pero atrevámonos y echémosle un vistazo. Tanto en el capítulo anterior como en éste estamos acercándonos al caos mediante ejemplos geométricos, intuitivos, a sabiendas de que muchas veces no es fácil comprender qué está pasando. Sabemos que lo habitual en los libros de divulgación, e incluso en los libros de texto al uso, es comenzar por los ejemplos numéricos, y sólo después abordar las ilustraciones geométricas y topológicas.

Nosotros, en cambio, hemos optado decididamente por lo contrario, y lo hemos hecho por dos razones: porque históricamente fue así como sucedió y porque de este modo el lector podrá ser partícipe de cómo los matemáticos fueron descubriendo paso a paso qué era el caos, primero de una forma cualitativa y, bastante más tarde, de una forma cuantitativa. Si el lector siente que la cabeza le da vueltas ante descripciones tan confusas, que no se preocupe, pues sólo estará sintiendo lo mismo que los matemáticos de la época; con el advenimiento del ordenador las cosas comenzaron a aclararse.

Tanto el solenoide como la herradura son, como ya se ha dicho anteriormente, ejemplos de aplicaciones, de transformaciones geométricas, que muestran caos. La transformación (llamémosla f) que da lugar a la herradura de Smale es sencilla. Para llevarla a cabo, partamos de un cuadrado o de cualquier figura semejante a un cuadrado. En primer lugar, la aplanamos un poco y la estiramos, y a continuación la doblamos con forma de herradura y la encajamos dentro de los límites de la figura original. Cuando repetimos una y otra vez, *ad infinitum*, esta transformación f, se produce una compleja e intrincada estructura multicapa y aparece el caos. En la primera iteración, el cuadrado inicial se transforma en una especie de herradura con forma de «U», tal como se muestra en la figura siguiente. En la segunda, la herradura se convierte en otra herradura con tres curvas en forma de «U». En la tercera, se producen siete curvas con la misma forma. Y así sucesivamente. En el límite aparece una curva infinitamente convolucionada, doblada, que recuerda mucho al enredo homoclínico que horrorizó a Poincaré. En efecto, estirar y doblar es la esencia geométrica del caos.

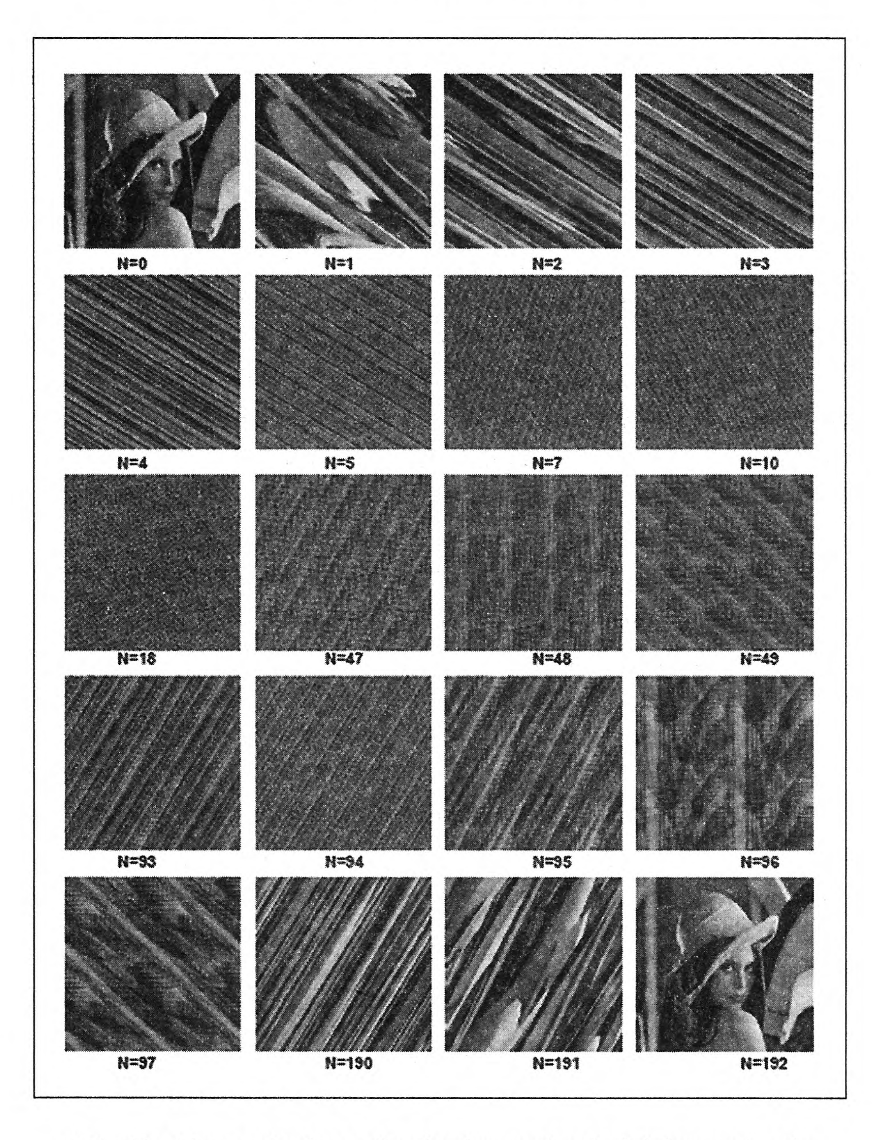


Iteraciones sucesivas de la herradura de Smale. Consiste en aplanar la figura, estirarla y, luego, doblarla con forma de «U» dentro de los límites de la figura original.

Los sucesivos estiramientos y plegados que caracterizan la herradura de Smale son un signo del caos y, por tanto, aparecen en múltiples aplicaciones caóticas. Por ejemplo: en la «aplicación del panadero», llamada de este modo porque reproduce las transformaciones de estiramiento y plegado que realizan los panaderos al amasar pan, o también en la «aplicación del gato», denominada así por su creador, V. I. Arnold (a quien pronto conoceremos), y que consiste en estirar y plegar sucesivas veces la cara de un gato. Pero nosotros no vamos a estirar y plegar la cara de un pobre gato —aunque fuese el gato cuántico de Schrödinger—, sino que vamos a hacer la prueba con una cara más atractiva, con la cara de Lenna.

Lenna fue *playmate* del número de noviembre (*miss* noviembre) de 1972 de la revista *Playboy*. Un fragmento de una fotografía suya sirve desde la década de 1970 como imagen de prueba para los algoritmos de compresión de imagen, y se ha convertido, *de facto*, en un estándar industrial y científico. (¡Para que luego digan que los matemáticos son gente aburrida!) De hecho, el número de *Playboy* en que apareció el póster central de Lenna se ha convertido en el más vendido de la revista.

Pues bien, si aplicamos reiteradas veces la aplicación del gato a la cara de Lenna, es decir, si sucesivamente la estiramos y plegamos sobre sí misma de una determinada manera, observaremos cómo en pocas iteraciones la cara desaparece por completo. Sin embargo, tras un número dado de iteraciones (exactamente 192), la cara de Lenna vuelve a aparecer. Bueno, mejor dicho, aparece una cara muy parecida (porque las trayectorias de los sistemas dinámicos no pueden coincidir dos veces salvo que sean periódicas y, en este caso, estamos siguiendo una órbita caótica). Pero la cara de Lenna reaparece para luego volver a desaparecer, y así *ad infinitum*. Cosas del caos.



Aplicación del gato sobre Lenna. El estiramiento y plegado de la imagen (paneles superiores) acaba produciendo un campo homogéneo (paneles centrales), pero a veces ocurre que algunos de los puntos vuelven cerca de sus posiciones iniciales y provocan una fugaz reaparición de la imagen original (paneles inferiores).

Lo peor (o lo mejor, según se mire) que le puede ocurrir a un sistema dinámico es que sea caótico. Entonces, las trayectorias próximas divergen rápidamente entre sí, según van siendo estiradas, comprimidas y dobladas en su aproximación al atractor. Esto determina comportamientos muy extraños y complejos, como el que

acabamos de comprobar en el caso de Lenna. Este singular comportamiento es consecuencia del teorema de recurrencia de Poincaré.

En su obra sobre los nuevos métodos de la mecánica celeste, Poincaré había llegado a formular un teorema sorprendente: «Dadas las ecuaciones de la forma definida y una solución particular cualquiera de esas ecuaciones, siempre se puede encontrar una solución periódica —cuyo periodo puede ser, en verdad, muy largo— tal que la diferencia entre las dos soluciones sea tan pequeña como se quiera». El retrato de Lenna ilustra el descubrimiento de la recurrencia de Poincaré: si se aplica repetidamente una transformación a un sistema, y el sistema no puede abandonar una región limitada, debe volver una infinidad de veces a estados próximos al original; en otras palabras, antes o después todo vuelve. Es el eterno retorno de Nietzsche en versión matemática. La existencia de una solución periódica perpetua implica que si la rueda de la bicicleta se nos pincha, basta esperar a que vuelva a hincharse por sí sola. Si esperamos el tiempo suficiente, la rueda pinchada de la bicicleta volverá a llenarse de aire. Lo dice Poincaré. El único problema es que a lo mejor hay que esperar más tiempo que la edad del universo.

¿ESTÁ USTED DE BROMA, SR. FEYNMAN?

Richard Phillips Feynman (1918-1988) fue un excéntrico físico estadounidense, merecedor del Premio Nobel de Física en 1965 por su contribución a la electrodinámica cuántica. Era aficionado a la hipnosis, los bares de *topless* y reventar cajas fuertes. En sus populares *The Feynman Lectures on Physics (Lecciones de Física)* dejó anotado algún que otro rasguño que nos puede llevar a formular la pregunta: ¿Conoce usted la teoría del caos, Sr. Feynman?

En la sección «Implicaciones filosóficas», correspondiente al capítulo 38 del primer volumen de sus *Lecciones*, publicado en 1965, Feynman describió —al igual que lo hiciera Max Born— cómo en el seno de la mecánica clásica existe una suerte de indeterminismo, desde un punto de vista práctico, consecuencia de la imprecisión a la hora de fijar las condiciones iniciales de algunos sistemas físicos. Si conociéramos la posición y la velocidad de cada partícula en el mundo podríamos predecir qué ocurrirá en el futuro. Supongamos, sin embargo, que no conocemos exactamente la posición de un átomo. Entonces, tras la colisión de ese átomo con otro, el error en la posición se habrá incrementado. Y, obviamente, tras cada nueva colisión, volverá a amplificarse. De modo que la imprecisión se incrementa muy rápidamente. Y, después de cierto tiempo, nuestro desconocimiento alcanzará cotas cósmicas.

Las matemáticas al otro lado del telón de acero

Al mismo tiempo, cruzando el telón de acero existía otra fértil tradición: la escuela rusa, formada por múltiples físicos y matemáticos que habían heredado las influyentes nociones acerca de la estabilidad del movimiento en los sistemas dinámicos de Liapunov.

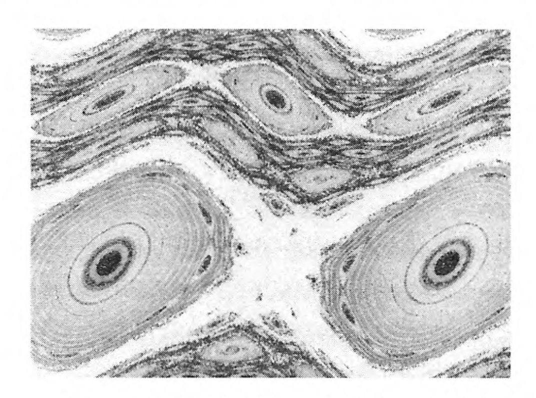
Trabajando más o menos en la misma época que Poincaré, el matemático y físico Aleksandr Liapunov (1857-1918) se había ocupado de la teoría de la estabilidad desde una perspectiva más cuantitativa. En vez de estudiar la geometría de las trayectorias, como hacía el francés, estudió unos números, los llamados «exponentes de Liapunov», que le servían como indicadores de la inestabilidad. Cuando alguno de esos exponentes era positivo, las trayectorias tendían a separarse (exponencialmente) entre sí. El sistema era, entonces, inestable.

Con estos precedentes, en la década de 1950 el seminario de Andrei Kolmogorov (1903-1987), de la Universidad Estatal de Moscú, se centró en la mecánica celeste, pues tanto él como su discípulo Vladimir Igorevich Arnold (1937-2010) se concentraron en el estudio teórico de la estabilidad de los sistemas dinámicos celestes, recogiendo el testigo de los trabajos de Poincaré y Liapunov. Fruto de este estudio, en 1954 Kolmogorov presentó un teorema en el Congreso Internacional de Matemáticos que tuvo lugar en Ámsterdam: el teorema K.

Más tarde, como el joven matemático alemán Jürgen Moser (1928-1999) quería escribir una reseña para la revista *Mathematical Reviews* y este tema le interesaba mucho, viajó hasta la Unión Soviética y entabló contacto con el discípulo de Kolmogorov, Arnold. De resultas del trabajo conjunto de los tres surgió el famoso (entre los especialistas) teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser). Este teorema describe qué ocurre cuando a un sistema integrable (lineal) se le aplica una perturbación no integrable (no lineal), y asegura que si las perturbaciones son lo suficientemente pequeñas, la mayoría de las órbitas se comportan como estables y cuasiperiódicas (nunca divergen demasiado de las órbitas periódicas del sistema). Pero también aparecen otras que son impredecibles, de modo que se forman islas de estabilidad en un océano de caos.

En el caso del sistema solar, como la masa de los planetas es insignificante en comparación con la del Sol, en una primera aproximación pueden despreciarse las fuerzas entre ellos, de manera que se obtiene así un sistema integrable en el que cada planeta recorre una bella elipse kepleriana, como demostró Newton. Pero si tomamos en cuenta las interacciones entre los planetas, el problema deja de ser integra-

ble, como sabemos gracias a Poincaré; los planetas dejan de describir elipses perfectas, y no es imposible que alguno incluso inicie una órbita caótica que lo expulse al espacio exterior. Desde 1954, gracias al teorema KAM, sabemos que las perturbaciones pequeñas sólo destruyen parcialmente la regularidad, de modo que si suponemos que las fuerzas interplanetarias no son excesivamente intensas, podemos esperar que la mayoría de las órbitas planetarias sean regulares, próximas a las elipses de Kepler. Ahora bien, esto no quiere decir que todos los movimientos dentro del sistema solar tengan que ser necesariamente regulares; sólo deben serlo la mayoría. El destino de algunos miembros menores bien puede ser seguir órbitas caóticas, que los lleven a una colisión o a salirse del sistema solar. Probablemente éste sea el destino de Quirón, un centauro (esto es, un astro mitad asteroide y mitad cometa) que se mueve entre Saturno y Urano, en una órbita excéntrica inestable.



Teorema KAM: islas de regularidad en medio de un mar de caos.

Otra ilustración del contenido del teorema KAM nos la proporciona el estudio numérico que el astrónomo francés Michel Hénon (n. 1931) realizó junto al estudiante de licenciatura Carl Heiles (n. 1939) en 1962 con la ayuda de una nueva herramienta: el ordenador. Ambos astrónomos estaban estudiando la dinámica estelar, es decir, cómo se mueven las estrellas dentro de una galaxia dependiendo de su energía. A energías bajas, las soluciones de las ecuaciones eran, como esperaban, periódicas o cuasiperiódicas, pero a altas energías, el ordenador mostraba que las trayectorias regulares se esfumaban y que aparecía un mar de caos en el que sólo de vez en cuando flotaba una isla de estabilidad. Era el sistema caótico de Hénon-Heiles.

Pero las influencias de la escuela rusa no se quedaron ahí, sino que durante la Guerra Fría los principales resultados de los matemáticos soviéticos fueron traduci-

dos al inglés y dados a conocer al resto de matemáticos, tanto europeos como norteamericanos, gracias al providencial trabajo de Solomon Lefschetz (1884-1972). Este ingeniero químico, nacido en Moscú, estudió en París y se marchó a trabajar a Estados Unidos, donde a raíz de un accidente en el que perdió las dos manos (un experimento salió mal y explotó), comenzó a interesarse por las matemáticas. Gracias a su estudio consiguió salir de la profunda depresión en que había caído tras el accidente y con el tiempo incluso ejerció como profesor en Princeton, donde daba sus clases con la ayuda de sendas manos artificiales de plástico, aunque cada día un alumno debía sujetarle y, posteriormente, retirarle una tiza de la mano derecha. Su contacto, tras el fin de la Segunda Guerra Mundial, con los matemáticos rusos resultó vital para el desarrollo de la teoría de los sistemas dinámicos y, con ella, de la teoría del caos que aún estaba germinando.

Lorenz: un café, un ordenador y una mariposa

Volvamos ahora a Estados Unidos donde en la década de 1960, exactamente en 1963, un joven meteorólogo del MIT llamado Edward Lorenz (1917-2008), antiguo alumno de Birkhoff en Harvard, planteó un modelo formado por tres ecuaciones diferenciales ordinarias para describir el movimiento de un fluido bajo la acción de un gradiente térmico. En realidad este problema es una simplificación del estudio de la convección en la atmósfera, esto es, cómo se comportan el flujo de aire caliente y el de aire frío cuando los sometemos a una diferencia térmica más o menos notable: el aire caliente se eleva y, al llegar a las capas altas de la atmósfera, se enfría, con lo que vuelve a bajar. Para ciertos valores de las constantes del modelo, las ecuaciones diferenciales representaban el comienzo de una convección no estacionaria, crítica.

Mientras buscaba soluciones numéricas con la ayuda de un ordenador, el Royal McBee LGP-30, el primer ordenador personal del mundo, encontró —al volver de tomar una taza de café, aunque hay quienes afirman que se trataba de una taza de té— con que se manifestaba un dramático comportamiento inestable, caótico. La computadora imprimía una lista de números rarísimos, sin patrón alguno. Lorenz pensó que había cometido algún error al ejecutar el programa y lo repitió varias veces. Pero siempre obtenía las mismas extrañas simulaciones numéricas. Listas de números que comenzaban prácticamente igual pero que acababan siendo completamente distintas. Lorenz se había topado, por casualidad, con el fenómeno de la sensibilidad a las condiciones iniciales, algo que hacía que su sistema fuera, en la prácti-

ca, impredecible. Reparó en que el sistema era altamente inestable con respecto a la más ínfima modificación. Una pequeña variación en las condiciones iniciales ocasionaba estados finales por completo diferentes, pues dos estados iniciales muy similares podían evolucionar de modos radicalmente distintos. En sus propias palabras:

> «Dos estados que difieran imperceptiblemente pueden evolucionar en dos estados considerablemente distintos. Si hay cualquier error en la observación del estado presente —y en un sistema real parece inevitable—, una predicción aceptable del estado en el futuro lejano bien puede ser imposible».

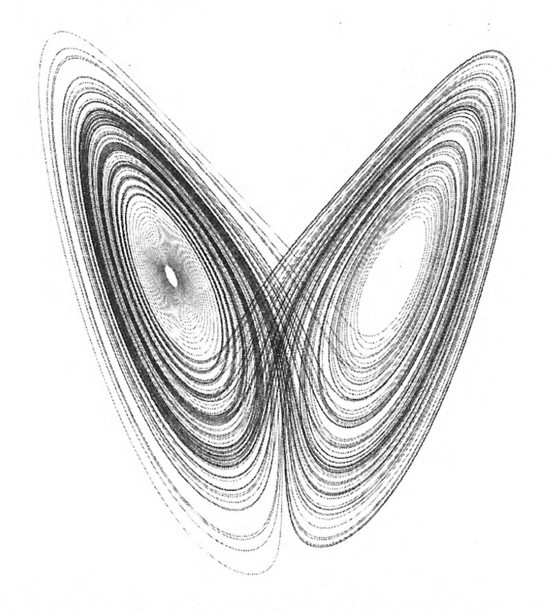
Tomando prestada la imagen que luego forjaría, Lorenz había descubierto el efecto mariposa: el aleteo de una mariposa en Brasil puede ocasionar un tornado en Texas. En efecto, supongamos que una pequeña mariposa está posada en un árbol en una remota región del Amazonas. Mientras permanece posada, abre y cierra ocasionalmente las alas un par de veces. Podría haberlo hecho sólo una vez, pero en este caso ha batido sus alas exactamente dos veces. Como el sistema atmosférico es un sistema caótico, que exhibe dependencia sensible a las condiciones iniciales, la diminuta variación en los remolinos de aire contiguos a la mariposa puede acabar influyendo en que haya o no haya un huracán sobre Texas varios meses después.

Este fenómeno se popularizó en 1972 cuando, en la American Association for the Advancement of Science (Asociación Americana para el Progreso de la Ciencia), Lorenz pronunció una conferencia titulada «¿Puede el aleteo de una mariposa en Brasil provocar un tornado en Texas?», aunque ya en 1963, al informar de su investigación, había citado el comentario de un compañero meteorólogo al respecto: «Edward, si tu teoría es correcta, un batir de alas de una gaviota podría cambiar el curso del tiempo para siempre».

Mientras que fue Lorenz quien introdujo la popular metáfora del efecto mariposa, el matemático estadounidense Guckenheimer fue el que acuñó la expresión «dependencia sensible a las condiciones iniciales» allá por la década de 1970. En cualquier caso, el resultado es el mismo: la dinámica caótica hace que las trayectorias que en principio coinciden se separen y diverjan entre sí.

Al igual que las listas de números, las gráficas que Lorenz reprodujo en su artículo mostraban una serie de oscilaciones cada vez mayores que terminaban volviéndose caóticas. Al principio la trayectoria era periódica, pero después comenzaba a oscilar violentamente, balanceándose hacia arriba y hacia abajo sin ritmo fijo ni pauta constante. Las trayectorias daban vueltas, al parecer al azar, alrededor de una

especie de figura con forma de ocho o de mariposa. Unas veces giraban un número de veces seguidas sobre uno de los ojos o lóbulos de la figura y, a continuación, giraban consecutivamente sobre el otro lóbulo un número de veces distinto. Además, las trayectorias vecinas tendían a separarse con el transcurso del tiempo, según eran estiradas y dobladas en torno a la extraña figura. Los estiramientos, al separar las trayectorias próximas, ampliaban los errores de predicción, y los plegamientos, por su parte, contribuían a mezclar y confundir trayectorias, al acercar trayectorias distintas. Era el atractor de Lorenz.



A diferencia de los atractores clásicos (puntos, ciclos límite), que son predecibles, los atractores extraños o caóticos, como el de Lorenz, reproducido aquí, corresponden a movimientos impredecibles y adquieren formas geométricas más complicadas.

Lorenz publicó su hallazgo en una revista de meteorología en forma de un artículo titulado «Flujo determinista no periódico», el cual pasó prácticamente desapercibido. De hecho, aunque Lorenz era meteorólogo, él había querido ser matemático, pero el advenimiento de la Segunda Guerra Mundial se lo impidió. Su descubrimiento matemático no resultó especialmente importante para el resto de los meteorólogos, por lo que durante casi una década dicho artículo permaneció prácticamente olvidado en las bibliotecas.

Sólo el profesor James Yorke (n. 1941), de la Universidad de Maryland, supo reconocer las repercusiones científicas y filosóficas de la investigación de Lorenz, ya

que en este trabajo de 1963 convergen —como muestra un simple vistazo a la bibliografía citada por Lorenz— los estudios topológicos sobre sistemas no lineales de Poincaré, la teoría de sistemas dinámicos de Birkhoff y, atención, la tradición matemática soviética, tal y como ésta quedaba plasmada en el libro *Qualitative Theory Of Differential Equations (Teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales)* de Nemytskii y Stepanov, publicado en 1949 en Moscú y traducido al inglés en 1960.

Si el efecto mariposa (la dependencia sensible a las condiciones iniciales) y lo que podemos llamar el «efecto baraja» o «efecto mezcla» (el estiramiento y plegado de las trayectorias) estaban más o menos ocultos en los enredos homoclínicos de Poincaré, ambos signos del caos emergieron a la luz, respectivamente, con el atractor de Lorenz y la herradura de Smale. En rigor, los enredos homoclínicos ya pusieron a Smale sobre la pista del solenoide y la herradura, cuya acción de estirar y doblar es indicadora y característica del caos. Había renacido la teoría del caos.

Los nuevos padres de la teoría del caos

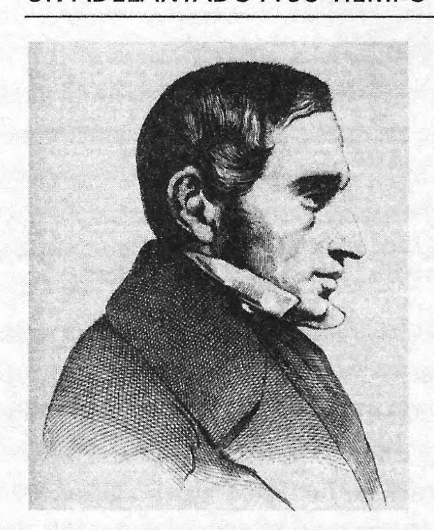
Si Edward Lorenz ofreció a la comunidad científica el paradigma de sistema dinámico caótico continuo (el sistema de Lorenz), el biólogo de poblaciones Robert May (n. 1936) dio a conocer en su artículo «Modelos matemáticos simples con dinámicas complicadas», publicado en la revista *Nature* en 1976, el paradigma de sistema dinámico caótico discreto (esto es, con el tiempo corriendo no de un modo continuo sino paso a paso). Se trataba de la aplicación logística, una función muy sencilla: $f(x) = kx(1-x)$, pero que, cuando k toma valores próximos a 4, presenta una dinámica, por paradójico que parezca, extremadamente compleja. Esta aplicación nos servirá en el próximo capítulo para presentar y explicar las principales nociones relacionadas con el caos.

De hecho, el término «caos» tuvo su bautismo oficial un año antes de la publicación de May. Fue en 1975 cuando el profesor Yorke lo introdujo en la moderna literatura científica gracias a su famoso artículo «Periodo tres implica caos» publicado con Tien Yien Li. Y pocos años después, entre 1978 y 1979, el físico Mitchell Feigenbaum (n. 1944) descubrió heurísticamente (indagando mediante métodos poco rigurosos, como, por ejemplo, el tanteo) ciertas constantes universales que caracterizan la transición del movimiento periódico al movimiento caótico.

Por último, dentro de esta panorámica, no hay que olvidar que entre finales de los años setenta y principios de los ochenta la exploración de aplicaciones de la teoría del caos comenzó a dar sus frutos más allá de las simulaciones en las pantallas

de ordenador. Un ejemplo paradigmático de la importancia del caos en el estudio de los fenómenos físicos es la transición a la turbulencia en los fluidos. La turbulencia es un fenómeno de gran importancia, pues aparece en múltiples ciencias, desde la mecánica de fluidos a la meteorología y la climatología. Para los matemáticos clásicos, la turbulencia se iniciaba como una acumulación de vibraciones, y la interpretación estándar sugería que, a medida que el movimiento del agua en un río se va haciendo más rápido, la suma de todas las vibraciones, aunque simples por separado, produce un movimiento inestable, inconstante, turbulento. El problema era que la mayoría de las vibraciones, al acumularse, terminan por acoplarse, por lo que dan lugar a un movimiento periódico combinado y no a una turbulencia. Finalmente, en 1971, los matemáticos David Ruelle (n. 1935) y Floris Takens (1940-2010) quisieron aplicar un enfoque teórico distinto: ver la turbulencia con gafas de topólogo. Fue entonces cuando llegaron a una idea totalmente nueva y brillante: la combinación de vibraciones puede producir un objeto nuevo, un «atractor extraño», al que llamaron así por su rara geometría, puesto que es un conjunto de carácter atractor pero muy distinto a los atractores ya conocidos (sumideros y ciclos límite).

UN ADELANTADO A SU TIEMPO



Pierre-François Verhulst.

Muy probablemente, el primer sistema dinámico con el que toma contacto un neófito en la teoría del caos es la aplicación logística: $f(x)=4x(1-x)$. A pesar de su aparente sencillez, esta aplicación muestra una dinámica altamente compleja que incluye el comportamiento caótico. La función logística proviene de la ecuación logística introducida por primera vez por el científico belga Pierre-François Verhulst (1804-1849). Cuando, en un estudio sobre el crecimiento de la población publicado en el año 1838, Verhulst introdujo la ecuación logística para modelizar el aumento y posterior frenado que muestran las poblaciones según las estadísticas demográficas, no podía ni imaginar que, más de un siglo después, ese modelo recibiría gran atención como ejemplo paradigmático de la teoría del caos.

Otro ámbito de aplicación de la teoría del caos que está cobrando cada vez más importancia es el relativo a las ciencias de la vida, donde destacan las fructíferas aplicaciones de aquélla al estudio de las irregularidades de los latidos del corazón o a la transmisión de enfermedades. Todavía más prometedores parecen ser algunos resultados en medicina y neurociencia, como, por ejemplo, en electroencefalografía, donde la detección de patrones caóticos y no caóticos (que son, curiosamente, los anormales) en las series temporales medidas parece a día de hoy el único modo de diagnosticar de forma precoz algunas enfermedades cerebrales, un aspecto que veremos con más detalle en el próximo capítulo.

ATRACTORES EXTRAÑOS VS. FRACTALES

La mayoría de atractores extraños que aparecen en los sistemas caóticos son conjuntos fractales. Precisamente, la geometría fractal, elucidada por Benoit Mandelbrot (1924-2010) en 1977 apoyándose en los trabajos pioneros de Fatou y Julia en 1918, ha sido considerada la geometría de la naturaleza, por cuanto numerosas estructuras naturales (las costas marítimas, las hojas de las plantas, las conchas y los caparazones, algunos órganos humanos como los pulmones, las galaxias, las constelaciones... y hasta los anillos de Saturno, cuyos segmentos recuerdan un conjunto fractal de Cantor) siguen diseños fractales, dado que la autosemejanza es una propiedad esencial a gran número de sistemas complejos.

Una revolución demasiado ruidosa

A pesar de todo lo dicho hasta ahora, las palabras ecuánimes, con una nota de escepticismo, de David Ruelle en su libro *Azar y caos* siguen teniendo plena vigencia:

> «La teoría matemática de los sistemas dinámicos se ha beneficiado del influjo de ideas "caóticas" y, en general, no ha sufrido de resultas de la evolución en curso... La física del caos, no obstante, a pesar de los recientes anuncios de que se han producido "novedosos" avances trascendentes, ha exhibido una decreciente producción de descubrimientos interesantes».

Por no mentar la visión distorsionada del caos que algunos posmodernos y otros pensadores anejos tienden a ofrecer. Voces críticas sostienen que se ha dado una publicidad desmedida al valor científico real de la teoría del caos y de la geometría

CAOS EN EL CIELO Y EN LA TIERRA

Si May introdujo el paradigma de sistema dinámico discreto caótico en una dimensión (la aplicación logística), fue el astrónomo francés Michel Hénon quien propuso el paradigma de sistema dinámico discreto caótico en dos dimensiones: la aplicación de Hénon. En 1976, años después de haber visto la luz el trabajo de Lorenz que contenía el modelo de sistema dinámico caótico a tiempo continuo, Hénon publicó un artículo titulado «Una aplicación bidimensional con un atractor extraño», en el que presentaba una transformación del plano definida por

$$H_{ab}(x,y)=(1+y-ax^2,\ bx),$$

donde a y b son dos constantes que suelen elegirse como $a=1{,}4$ y $b=0{,}3$. Esta aplicación H representa una simplificación de la sección de Poincaré del atractor de Lorenz. Pues bien, si aplicamos H sucesivas veces a un cuadrado, observamos cómo se transforma, primero en un cuadrilátero cada vez más aplanado, según va siendo estirado y doblado, y después en una especie de herradura infinitamente intrincada. Esa estructura infinitamente intrincada (fractal) a la que se aproximan las iteraciones de H es el atractor extraño de Hénon.



La estructura del atractor de Hénon es fractal, es decir, autosimilar (se repite a pequeña escala una y otra vez).

A pesar de que Hénon afirmaba que se trataba de un atractor extraño (es decir, de un atractor con naturaleza fractal), no fue hasta 1991 cuando los matemáticos suecos Michael Benedicks y Lennart Carleson demostraron con todo rigor su existencia.

fractal. El abuso ha llegado hasta su aplicación delirante al análisis literario y a la gestión empresarial.

Sin embargo, lo que nadie puede negar es que una nueva puerta se ha abierto: la del caos. Una nueva ciencia multidisciplinar, denominada teoría del caos o teoría de los sistemas dinámicos por los matemáticos, dinámica no lineal por los físicos, y ciencia no lineal por el resto de científicos. La ciencia del efecto mariposa, la sensibilidad a las condiciones iniciales, los itinerarios aleatorios, erráticos e irregulares, el comportamiento aperiódico e inestable, las órbitas homoclínicas, los estiramientos y plegados, los atractores extraños, y un largo etcétera. Una puerta que ahora hay que cruzar.

Capítulo 3

Pero, señor matemático, ¿qué es exactamente el caos determinista?

Yahvé.— ¿Quién podrá contar el polvo de Jacob?
¿Quién podrá enumerar la nube de Israel?
Números, XIII 10

Mefistófeles.— ¿Quién sabe cómo caerán a partir
de ahora los dados?
Johann Wolfgang von Goethe, *Fausto*

Dios y el Diablo, por una vez y sin que sirva de precedente, están de acuerdo en una cosa: que la capacidad humana de predicción presenta límites insalvables... La teoría de la relatividad de Einstein eliminó la ilusión del espacio y el tiempo absolutos de la física clásica de Newton; la teoría cuántica de Planck, Bohr y Heisenberg arruinó, por su parte, el sueño de los procesos de medición controlables, y la teoría del caos ha barrido de un plumazo la fantasía de la predictibilidad infinita.

Pero la ruptura más notable con el pensamiento tradicional es, precisamente, el entendimiento de que no es posible, como cuestión de principio, predecir el comportamiento a tiempos grandes de muchos sistemas, por la extrema inestabilidad de las soluciones de sus ecuaciones de movimiento. Se trata de un comportamiento muy complejo, que no se debe a ruidos externos, ni a tener muchos grados de libertad, ni a efectos cuánticos. Las ecuaciones son deterministas, pero las soluciones tienen propiedades estocásticas. A esto se le llama «caos determinista». En este capítulo vamos a intentar explicar este concepto matemáticamente, ya que, como dijo Charles Darwin, «las matemáticas parecen dotarle a uno de un nuevo sentido, de un sexto sentido».

Caos y complejidad

Los sistemas caóticos y los sistemas complejos han sido durante décadas los grandes olvidados de la ciencia institucionalizada. La ciencia del siglo XX nos acercó al tejido del universo, al espacio-tiempo de la relatividad y al microcosmos de la mecánica cuántica (el tablero de juego), y la ciencia actual nos está llevando a comprender mejor cómo se organiza nuestra propia realidad (las fichas del juego). Pero la verdadera grandeza de la ciencia acaba valorándose por su utilidad, y sólo ahora, a principios del siglo XXI, estamos comenzando a mensurar la de la teoría del caos y las ciencias de la complejidad.

De hecho, la teoría del caos es sólo una de las llamadas ciencias de la complejidad, ya que los sistemas caóticos son una clase de sistemas complejos, pero hay muchas otras, como la geometría fractal, la teoría de catástrofes, la lógica difusa, etc. La clase de sistemas que estudia la teoría del caos se dice que son de difícil descripción porque están a medio camino entre el orden y el desorden, entre el cristal y el humo. Mientras que los sistemas muy ordenados (como un cristal) o bien muy desordenados (como el humo) son simples, de fácil descripción, los sistemas intermedios presentan un pico de complejidad. Los sistemas caóticos, en particular, son sistemas deterministas no lineales que muestran un comportamiento aperiódico, lo que los hace impredecibles. El aleteo de las alas de una mariposa se puede sentir al otro lado del mundo, afirma un proverbio chino. O, como escribió el matemático Blaise Pascal, si la nariz de Cleopatra hubiera sido un poco más pequeña, la historia del mundo habría sido por completo distinta: Octavio se habría enamorado de Cleopatra y no se habría convertido en el primer emperador romano. Además, según vamos a ver, los sistemas caóticos son ubicuos, pues aparecen en las matemáticas, la física, la astrofísica, la meteorología, la biología, la medicina... Es decir, que casi todos, por no decir todos, los sistemas reales presentan una dinámica caótica.

Sistemas dinámicos

Ya hemos visto que el caos es un fenómeno que se estudia dentro de la teoría matemática de los sistemas dinámicos. Pero ¿qué es un sistema dinámico? Se trata de un modelo matemático, generalmente de utilidad en las ciencias naturales o sociales, que consiste en una ecuación que describe cómo evoluciona el estado del sistema con el paso del tiempo.

Hay sistemas dinámicos discretos y continuos. En los discretos, el tiempo varía paso a paso ($t=0, 1, 2, 3\ldots$). Así, un sistema dinámico discreto viene dado, formalmente, por una ecuación en diferencias, que no es más que una fórmula que nos dice cómo calcular, a partir de un término de partida, el término siguiente. Y, a partir de éste, otro término más, y así hasta el infinito, con lo cual se obtiene una sucesión de números. En suma, una ecuación en diferencias es una ecuación de la forma

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

donde f es una función que nos dice cómo calcular x_{n+1} a partir de x_n. En otras palabras, cómo calcular x_1 a partir de x_0; x_2 a partir de x_1; x_3 a partir de x_2, etc. Una ecuación en diferencias es, pues, una fórmula que expresa el valor de la variable en el paso siguiente en función de su valor en el paso anterior. Así, dada una condición inicial x_0, la solución del sistema dinámico es la trayectoria u órbita $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ que se obtiene al aplicar f sucesivas veces sobre x_0.

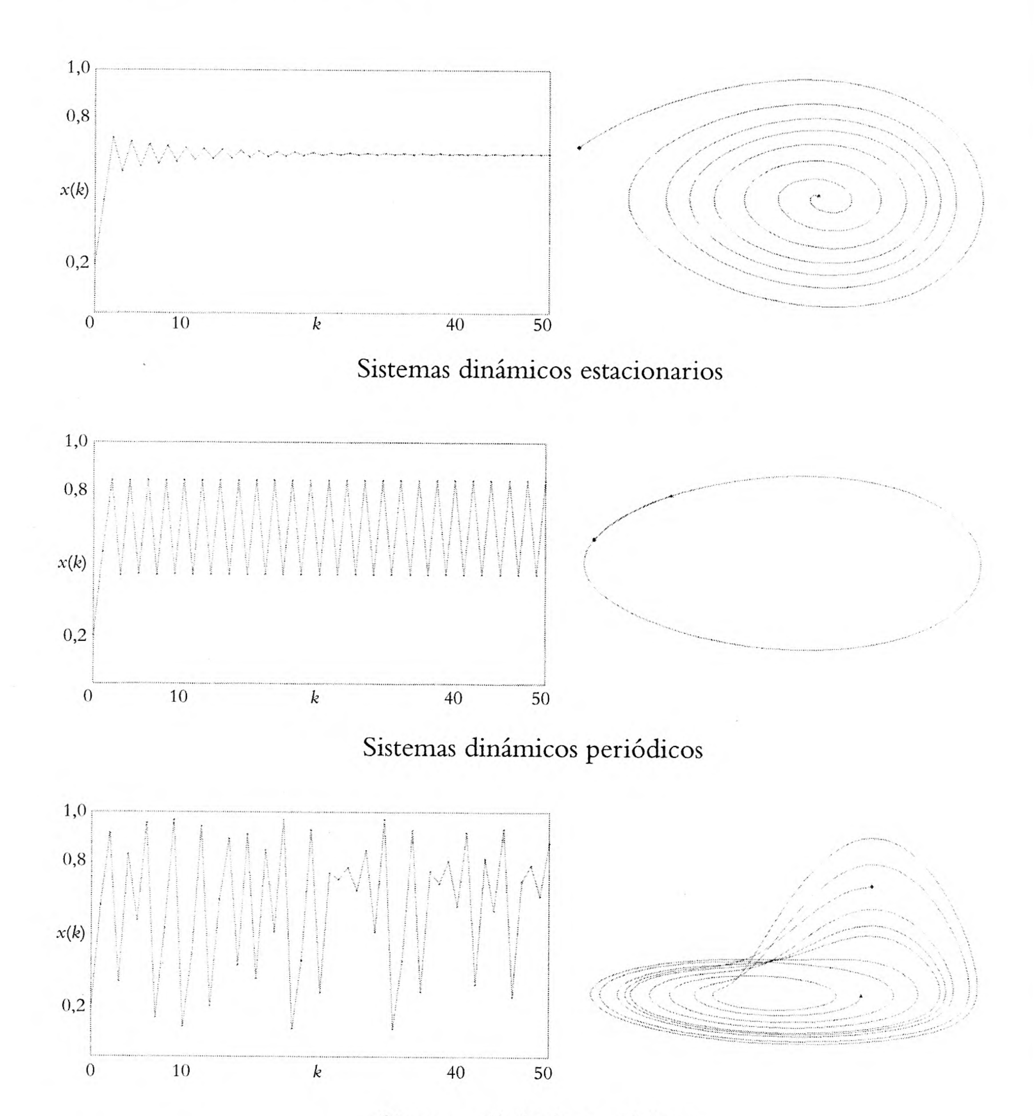
En cambio, en los sistemas dinámicos continuos el tiempo no corre paso a paso, sino que lo hace de un modo continuo, como en el mundo real. Los sistemas dinámicos continuos vienen dados por ecuaciones diferenciales, como las que ya hemos visto en los dos capítulos previos, que son fórmulas que expresan la tasa de cambio de la variable representativa en función de su valor actual. En nuestro análisis matemático del caos vamos a centrarnos, por sencillez, en el estudio de los sistemas dinámicos discretos, ya que éstos son el meollo de la cuestión.

Hay un teorema matemático que asegura que un sistema dinámico continuo es caótico si y sólo si existe una sección de Poincaré en la que se puede definir un sistema dinámico discreto que sea también caótico.

Pues bien, dentro de los sistemas dinámicos discretos hay una clase que presenta una característica muy relevante: son los sistemas no lineales. Un sistema es lineal si la función f es lineal, es decir, si es de grado 1 y, por tanto, de la forma $f(x) = ax + b$. Por el contrario, si la función f es no lineal, o sea, si es de grado mayor que 1 y, por ejemplo, de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, el sistema se considera no lineal.

En los sistemas dinámicos no lineales, pese a que el valor de las magnitudes que caracterizan el sistema viene determinado por los valores del instante anterior (el sistema se dice que es determinista), los valores de salida (el *output*) no son proporcionales a los valores de entrada (el *input*). Así, microcambios en las condiciones iniciales pueden ocasionar macrocambios en los estados finales. Y esta despropor-

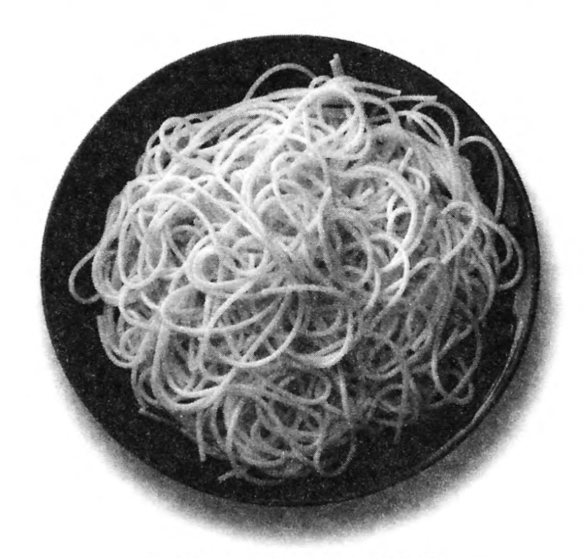
ción entre causas y efectos está detrás del comportamiento tan variado que presentan: los hay que determinan puntos fijos, órbitas periódicas, órbitas cuasiperiódicas y, por último, órbitas... ¡caóticas!



Tipos de sistemas dinámicos no lineales (estacionarios, periódicos y caóticos), según la representación de la serie temporal de valores (izquierda) y la gráfica de la trayectoria en el diagrama de fases (derecha).

El efecto mariposa y el efecto baraja

Llegado este punto es momento de responder a la pregunta que da título al capítulo: ¿qué es, exactamente, el caos determinista? Bueno, pues preguntémonos antes qué hemos aprendido en las páginas previas de Poincaré, Smale y Lorenz. Hemos visto que la esencia geométrica del caos consiste en estirar y doblar las trayectorias. Los estiramientos y plegados sucesivos provocan enredos y hacen que el espacio de fases se convierta, si imaginamos que cada trayectoria es una especie de fideo muy largo, en una suerte de plato de espaguetis a la boloñesa, donde cada trayectoria-espagueti está enredada y enmarañada con las demás. En consecuencia, cualquier pequeña imprecisión en la medida de las condiciones iniciales determina que podamos equivocarnos en el seguimiento de la trayectoria-espagueti correcta, siguiendo por error otra trayectoria-espagueti que esté anudada con la que nos interesa, pero que termine en otra parte muy distinta, y que, por tanto, nuestra predicción a largo plazo sea completamente errónea. Efecto mariposa, vaya.



Enredo «caótico» de espaguetis.

En resumen, la panorámica histórica que hemos trazado de la génesis de la teoría del caos nos ha enseñado que son dos las características estructurales asociadas al caos, muy ligadas a su famosa impredictibilidad. En primer lugar, que los sistemas caóticos son muy sensibles a las condiciones iniciales (Poincaré, Lorenz), y, en se-

gundo lugar, que las soluciones de los sistemas caóticos se enredan, estirándose y replegándose, entre sí (Poincaré, Smale). Y hemos visto manifestarse ambas características en el problema de los tres cuerpos de Poincaré, el billar de Hadamard, la herradura de Smale, el sistema de Lorenz, etc.

Por lo tanto, la definición matemática del caos comprende, por un lado, la dependencia sensible a las condiciones iniciales o efecto mariposa (el hecho de que el suave aleteo de una mariposa sobre el Amazonas pueda desencadenar un tornado sobre China), y, por otro, la mezcla topológica o efecto baraja (el hecho de que las trayectorias se mezclen entre sí como si un panadero imaginario las estuviera amasando unas con otras).

CAOS = EFECTO MARIPOSA + EFECTO BARAJA.

El caos consiste, pues, en la conjunción simultánea de dos clases de efectos: el efecto mariposa y el efecto baraja. No basta con que las trayectorias próximas se separen rápidamente con el tiempo, sino que también hace falta que éstas se estiren y se plieguen, entremezclándose mutuamente. Ambos efectos son las señales del caos.

Hay muchos ejemplos paradigmáticos de sistemas caóticos, la mayoría de los cuales ya nos han salido al paso. En el caso de sistemas dinámicos continuos, el ejemplo más representativo de sistema caótico que no conserva la energía (disipativo) es el sistema de Lorenz, que modela de manera simplificada la atmósfera terrestre. Por su parte, el sistema de Hénon-Heiles, muy relacionado con el problema de los tres cuerpos estudiado por Poincaré, es el modelo típico para el estudio del caos en sistemas conservativos (hamiltonianos). Y en el caso de sistemas dinámicos discretos nos hemos topado ya con la aplicación logística de May —que explicaremos con más detalle a continuación— y con la aplicación bidimensional de Hénon, dos sistemas que presentan herraduras del tipo de la de Smale y, lo que es más importante aún, dinámicas de corrimiento de símbolos. La dinámica de corrimiento de símbolos o aplicación *shift* de Bernoulli es, quizás, el ejemplo de sistema dinámico discreto caótico más sencillo posible.

La aplicación *shift* o «de borrado» se define de la siguiente manera: dado un número x entre 0 y 1 escrito en forma decimal, $B(x)$ va a consistir en correr la coma decimal una posición hacia la derecha y borrar la primera cifra (la parte entera, no decimal). Por ejemplo:

$$B(0{,}324571) = 0{,}24571,$$

es decir, hemos corrido la coma decimal una posición hacia la derecha y borrado el 3. Análogamente,

$$\begin{gathered} B(0{,}24571) = 0{,}4571 \\ B(0{,}4571) = 0{,}571 \\ B(0{,}571) = 0{,}71 \\ B(0{,}71) = 0{,}1 \\ B(0{,}1) = 0 \\ B(0) = 0 \\ B(0) = 0 \\ \dots \end{gathered}$$

La órbita o trayectoria del dato inicial $x = 0{,}324571$ es, por consiguiente, $\{0{,}324571,\ 0{,}24571,\ 0{,}4571,\ 0{,}571,\ 0{,}71,\ 0{,}1,\ 0,\ 0,\ 0,\dots\}$. Esta órbita tiende a un punto fijo, que es el 0 (un punto atractor o sumidero).

La aplicación B de Bernoulli es, como vamos a comprobar, caótica, porque presenta tanto el efecto mariposa como el efecto baraja. Con respecto a la dependencia sensible a las condiciones iniciales, hagamos la prueba: supongamos que estamos interesados en seguir la trayectoria de $x = 1/3 = 0{,}\widehat{3} = 0{,}33333\dots$ pero, como al medir sólo usamos una cantidad finita de decimales, tomamos $y = 0{,}3333$, cometiendo un pequeño error inferior a una milésima. Al principio, las órbitas de x e y permanecen próximas, pero a la larga terminan separándose irremediablemente:

$$\begin{array}{ll} B(0{,}33333\dots) = 0{,}33333\dots & B(0{,}3333) = 0{,}333 \\ B(0{,}33333\dots) = 0{,}33333\dots & B(0{,}333) = 0{,}33 \\ B(0{,}33333\dots) = 0{,}33333\dots & B(0{,}33) = 0{,}3 \\ B(0{,}33333\dots) = 0{,}33333\dots & B(0{,}3) = 0 \\ B(0{,}33333\dots) = 0{,}33333\dots & B(0) = 0 \\ B(0{,}33333\dots) = 0{,}33333\dots & B(0) = 0 \\ \dots & \dots \end{array}$$

Al igual que el resto de números decimales periódicos, $x = 0{,}\widehat{3}$ determina una órbita periódica para la aplicación *shift*. En este caso concreto, x es un punto periódico de periodo 1, es decir, un punto fijo, porque se repite indefinidamente. En cambio, al igual que el resto de números decimales exactos, $y = 0{,}3333$ es un punto que forma parte de la cuenca de atracción del 0, porque a la larga su órbita termina

siendo atraída por 0. De modo que el error de medida, que era al principio inferior a una milésima ($x-y=0,\widehat{3}-0,3333=0,0000\widehat{3}$), termina por amplificarse sobremanera, hasta el orden de las décimas (a partir de la cuarta iteración el error es igual a $0,\widehat{3}-0=0,\widehat{3}$). Dos condiciones iniciales muy próximas dan lugar a dos trayectorias que, al cabo de un tiempo, no tienen nada que ver entre sí.

Y ¿qué hay del efecto baraja? Para comprobarlo nos vamos a servir de los números decimales que son infinitos pero no periódicos, es decir, de los números irracionales. Echemos un vistazo a las órbitas de $\sqrt{2}-1$ (=0,41421356237...) y de $\pi-3$ (=0,14159265358...):

$$B(\sqrt{2}-1)=0,14213\ldots$$
$$B(0,14213\ldots)=0,42135\ldots$$
$$B(0,42135\ldots)=0,21356\ldots$$
$$B(0,21356\ldots)=0,13562\ldots$$
$$B(0,13562\ldots)=0,35623\ldots$$
$$B(0,35623\ldots)=0,56237\ldots$$
...

$$B(\pi-3)=0,41592\ldots$$
$$B(0,41592\ldots)=0,15926\ldots$$
$$B(0,15926\ldots)=0,59265\ldots$$
$$B(0,59265\ldots)=0,92653\ldots$$
$$B(0,92653\ldots)=0,26535\ldots$$
$$B(0,26535\ldots)=0,65358\ldots$$
...

¿Qué observamos? ¡Que los números decimales que van obteniéndose son completamente aleatorios! Parecen sacados de un bombo de lotería. Es el azar que surge del caos. Tanto la órbita de $\sqrt{2}-1$ como la de $\pi-3$, y en general la de cualquier número irracional, dan tumbos de aquí para allá entre 0 y 1: tan pronto están cerca de 0 como de 1 (o próximas a 0,5). En definitiva, los decimales de un número irracional no siguen ninguna pauta reconocible. Así pues, mientras que los números racionales —los números decimales exactos y periódicos— dan lugar a órbitas que antes o después son periódicas (que se repiten), los números irracionales —los números decimales infinitos no periódicos— determinan, en cambio, órbitas completamente irregulares, erráticas. Y como todo racional está infinitamente cerca de los irracionales y viceversa, las órbitas periódicas y aperiódicas se mezclan entre sí irremediablemente. Es el efecto baraja.

Ahora bien, uno podría preguntarse dónde están las famosas operaciones de estirado y doblado que producen el caos. Para encontrarlas, debemos fijarnos cuidadosamente en qué operaciones matemáticas estamos realizando cuando aplicamos la *B* de Bernoulli. Hemos dicho que esta aplicación consiste en correr la coma una posición hacia la derecha y borrar la primera cifra; pues bien, al trasladar la coma lo que estamos haciendo es multiplicar el número por 10, es decir, «estirarlo»,

A VUELTAS CON LA APLICACIÓN *SHIFT* DE BERNOULLI

La dinámica de corrimiento de símbolos tiene otras propiedades muy interesantes:

1) No es computable por ordenador. Como los ordenadores trabajan con un número limitado de cifras decimales (con una precisión finita), para ellos todos los números son como decimales exactos y, por tanto, si programamos la aplicación de Bernoulli, veremos en la pantalla del ordenador cómo todas las órbitas —al igual que los decimales exactos— terminan siendo atraídas por el punto 0. Ni rastro del caos.

2) Existen órbitas periódicas de cualquier periodo. Como hay números decimales de cualquier periodo (por ejemplo, de periodo seis: $0,\widehat{346235}$), aparecen órbitas de cualquier periodo imaginable: 1, 2, 3, 4, 5... Con respecto a esto, hay un célebre teorema de los matemáticos Tien-Yien Li y James Yorke, basado en otro de Sharkovsky, que establece, para una función continua, que si existe una órbita de periodo 3, existen órbitas de cualquier periodo. Sí, como se lee: la existencia de un 3-ciclo implica de por sí la existencia de un n-ciclo (para n = 1, 2, 3, 4, 5...). Li y Yorke lo resumieron muy bien en el título de su artículo: «Periodo tres implica caos».

3) La dinámica de corrimiento de símbolos es, según descubrieron Hadamard y Smale, una de las trazas más reconocibles del caos. Tanto en el solenoide y la herradura de Smale como en el atractor de Lorenz aparecen insertas dinámicas de corrimiento de símbolos. Si en vez de considerar expresiones decimales en base 10 lo hacemos en base 2 (es decir, empleando sólo ceros y unos), cada trayectoria del atractor de Lorenz puede identificarse con una secuencia de ceros y unos. Por ejemplo, la trayectoria 0,11000101... indica que la trayectoria girará primero dos veces en torno al ojo derecho del atractor (porque hay dos unos seguidos tras la coma decimal), después tres veces en torno al ojo izquierdo (porque a continuación aparecen tres ceros seguidos), etc. Usando esta dinámica simbólica puede probarse la existencia de caos en el sistema de Lorenz, porque cada trayectoria da vueltas erráticamente en torno a cada ojo del atractor.

y al borrar la primera cifra, lo que hacemos es reducir el número, es decir, «plegarlo». De nuevo, la receta mágica del caos.

Fijémonos ahora en la aplicación logística de May, que viene dada por la siguiente ecuación en diferencias:

$$x_{n+1} = kx_n(1-x_n).$$

En otros términos: dada una condición inicial x entre 0 y 1, la órbita de x se calcula aplicando sucesivas veces la función $f(x) = kx(1-x)$, donde k es un parámetro que vale más que 1 pero menos que 4. Ocurre que el comportamiento del sistema logístico —llamado así porque sirve para modelar la dinámica de ciertas poblaciones— depende espectacularmente del valor que le demos a k. Si k es menor que cierto valor crítico que se estima en 3,569945..., las órbitas o trayectorias son bastante regulares. Pero sobrepasado ese límite, se encaminan sin retorno hacia el caos. Este sistema dinámico discreto exhibe con claridad cómo aparecen propiedades complejas detrás de operaciones matemáticas sencillas. Comprobémoslo.

Lo primero que tenemos que observar es que $f(x)$ es una función de grado 2, pues, en efecto:

$$f(x) = kx(1-x) = kx - kx^2.$$

Con otras palabras, $f(x)$ es una función no lineal, y es precisamente esta no linealidad lo que posibilita toda suerte de comportamiento caótico, porque sólo así pequeñas causas pueden provocar grandes efectos.

Comencemos estudiando la dinámica de la aplicación logística para k por debajo del valor crítico, por ejemplo, para $k = 2$. Tomemos como condición inicial $x_0 = 0{,}8$ y calculemos, con ayuda de una calculadora de bolsillo, su órbita:

$$x_1 = f(x_0) = 2x_0(1-x_0) = 2 \cdot 0{,}8 \cdot (1-0{,}8) = 2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}32$$
$$x_2 = f(x_1) = 2x_1(1-x_1) = 2 \cdot 0{,}32 \cdot (1-0{,}32) = 2 \cdot 0{,}32 \cdot 0{,}68 = 0{,}4352$$
$$x_3 = f(x_2) = 2x_2(1-x_2) = 2 \cdot 0{,}4352 \cdot (1-0{,}4352) = 2 \cdot 0{,}4352 \cdot 0{,}5648 = 0{,}49160192.$$

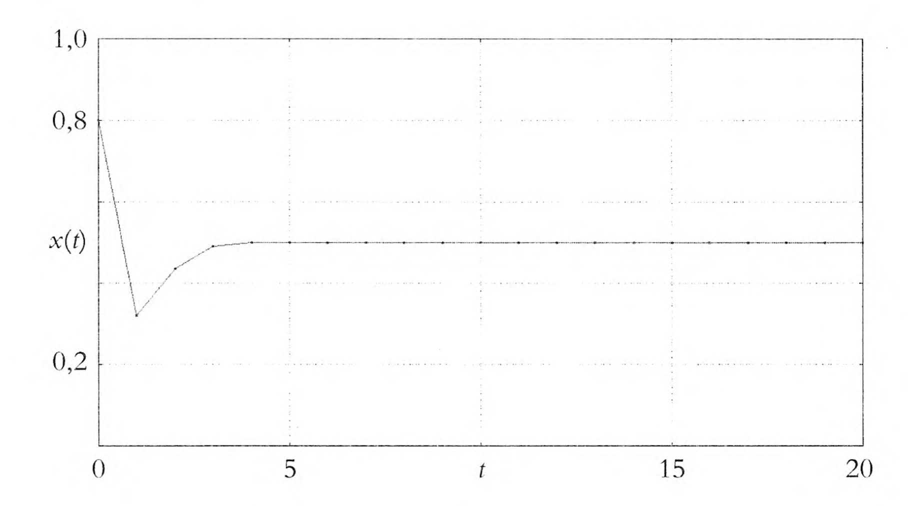
Si, ahora que ya sabemos cómo se calculan los primeros términos de la órbita, calculamos directamente los siguientes, obtenemos:

$$x_4 = 0{,}4998589\ldots$$
$$x_5 = 0{,}4999998\ldots$$
$$x_6 = 0{,}4999999\ldots$$
$$\ldots$$

Fijémonos en los números. ¿Qué sucede? Van acercándose cada vez más a 0,5. Nuestra trayectoria se acerca claramente a un límite, que es el punto atractor 0,5.

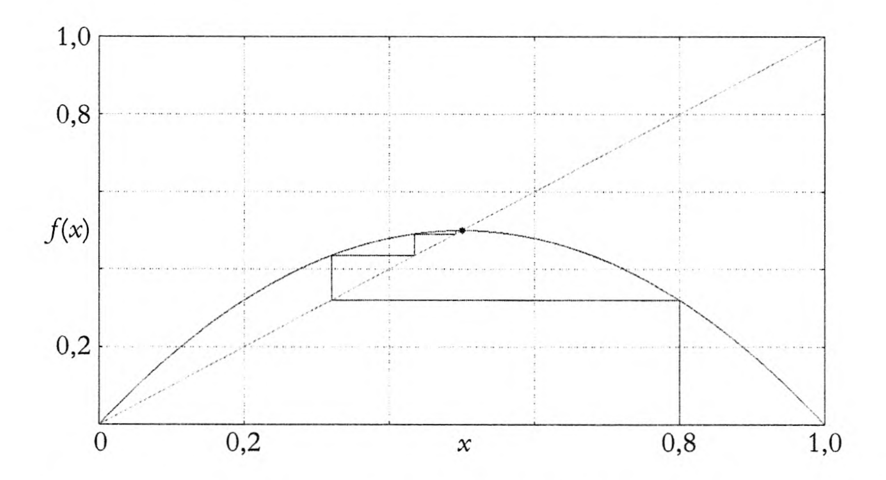
Calculemos, por curiosidad, la órbita de 0,5: dado que $f(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}5) = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$, observamos que la órbita de 0,5 es estacionaria (siempre vale 0,5). La órbita de 0,8 converge, por tanto, a un punto de equilibrio.

Pero observemos con gafas de geómetra cómo nuestra trayectoria tiende hacia ese punto fijo. Para ello vamos a emplear dos métodos. En primer lugar, representamos con ayuda de un programa de ordenador cómo evolucionan los valores de la órbita (representados en el eje vertical), según avanza el número de iteraciones (representado en el eje horizontal):



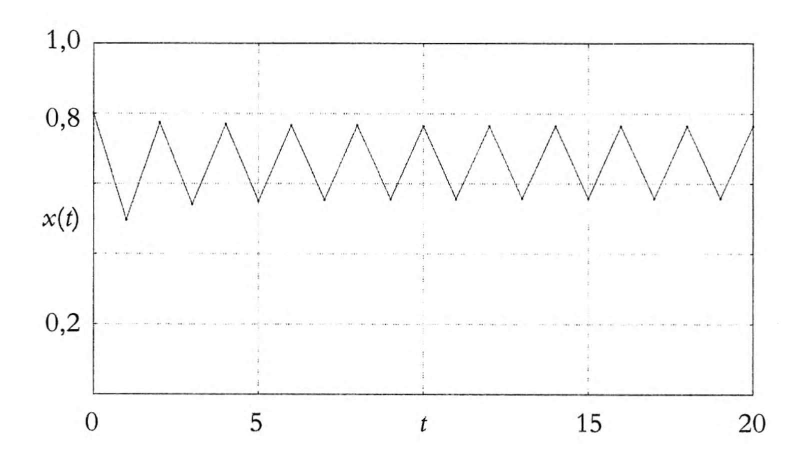
Es fácil observar que los valores de la órbita muy pronto se estabilizan en torno a 0,5, como ya sabíamos gracias a la calculadora.

En segundo lugar, vamos a usar el llamado «diagrama de telaraña», que nos permite dibujar la órbita de un punto. Una vez representada $f(x) = 2x(1 - x)$, que da una parábola, puesto que $f(x)$ es una función de segundo grado, tomamos nuestra condición inicial $x_0 = 0{,}8$, puesto que vamos a calcular su órbita gráficamente. Trazamos una línea vertical desde la abscisa $x_0 = 0{,}8$ hasta encontrarnos con la parábola $f(x)$. Seguidamente, desde el punto de corte con la parábola trazamos una línea horizontal hasta alcanzar la diagonal $y = x$. La nueva abscisa o coordenada horizontal es, entonces, la concerniente a ese punto de corte con la diagonal, y corresponde a x_1. A continuación, nos movemos verticalmente —hacia arriba o hacia abajo— hasta volver a intersecar la gráfica de $f(x)$. Reiterando el proceso se obtiene una línea quebrada cuyos segmentos verticales tienen abscisas $x_0, x_1, x_2, x_3 \ldots$ y que nos indica hacia dónde tiende la órbita de condición inicial x_0:



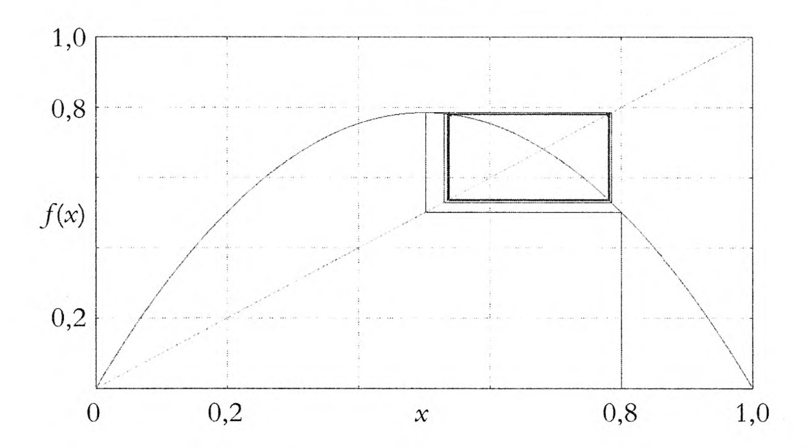
En esta gráfica podemos observar cómo la «telaraña» de $x_0 = 0{,}8$ converge al punto fijo, al punto en que se intersecan la parábola $f(x)$ y la recta identidad $y = x$. Se trata, como era de esperar, de 0,5.

Repitamos el estudio que hemos realizado cambiando el valor del parámetro k. Hagamos que, en vez de valer 2, valga 3,1. Para $k = 3{,}1$, ésta es la órbita de nuestra condición inicial $x_0 = 0{,}8$:

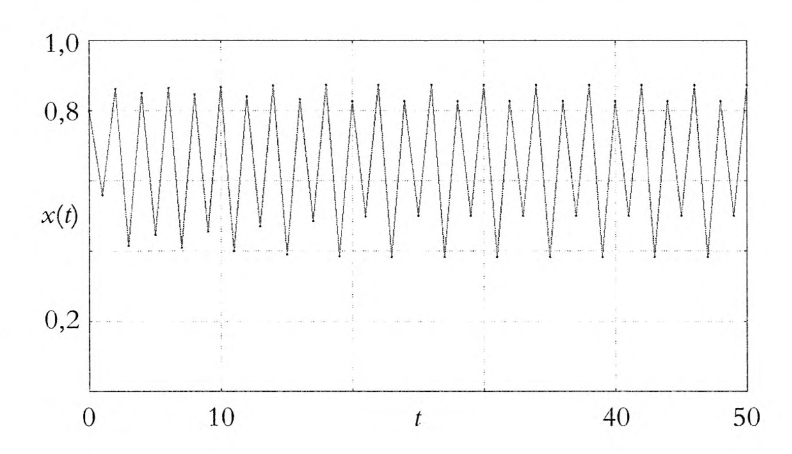


Cuando k supera el valor 3, sucede algo curioso: aunque el movimiento sigue siendo regular, ya no hay un único punto límite al que tienda la órbita de 0,8; ahora, la órbita tiende a oscilar entre dos valores, 0,56 y 0,76, según se aprecia en la gráfica. Es como si el punto atractor 0,5 se hubiera escindido en dos puntos atractores: 0,56 y 0,76. Nos encontramos, en definitiva, con una órbita de periodo 2, con

un 2-ciclo, puesto que hay dos puntos atractores. Ésta es la nueva telaraña, que, como puede verse, ya no da lugar a un punto, sino a un cuadrado:



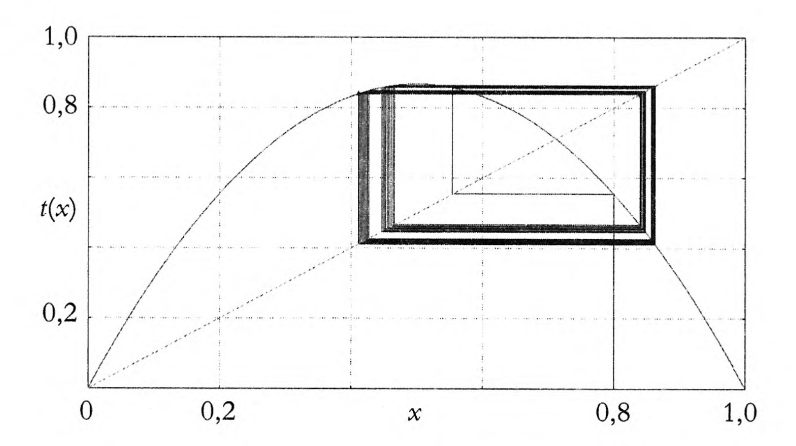
Sigamos aumentando k y consideremos a continuación el caso $k = 3{,}5$. Ésta es la órbita de $x_0 = 0{,}8$:



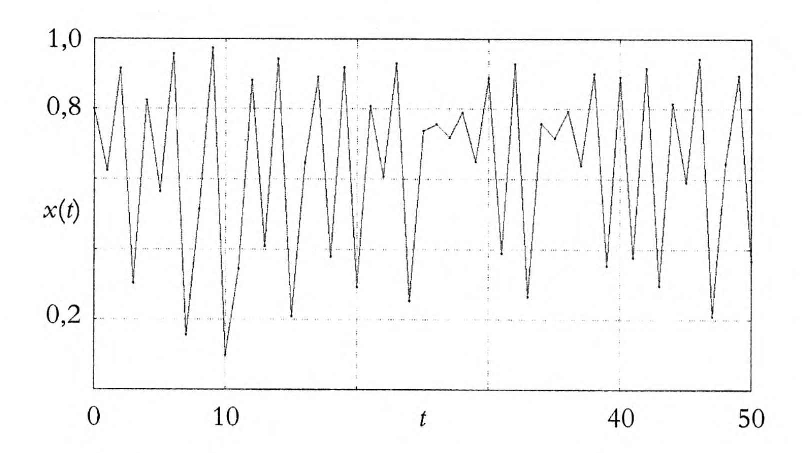
Ahora la órbita oscila alrededor de cuatro puntos, que son aproximadamente 0,39, 0,51, 0,82 y 0,86. Si con $k = 3{,}1$ había dos puntos atractores, con $k = 3{,}5$ hay cuatro. Y, en lugar de una órbita periódica de periodo 2, obtenemos una de periodo 4, un 4-ciclo (porque los valores se repiten cada cuatro pasos o iteraciones). Parece como si, según fuéramos aumentando k, los periodos se fueran duplicando, es decir, multiplicándose por dos: 1, 2, 4... Primero tuvimos un único punto atractor, luego, dos puntos atractores, ahora, cuatro, y próximamente —podemos conjeturar—,

ocho, dieciséis, treinta y dos, etc. La dinámica ya no es tan simple, pero aún mantiene una pauta más o menos regular.

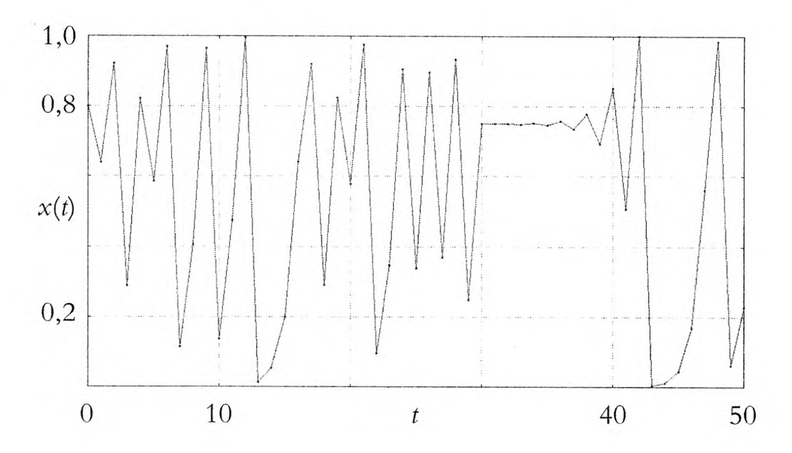
Más adelante retomaremos este extraño fenómeno de la duplicación del periodo. De momento, conformémonos con visualizar la nueva telaraña (formada por dos cuadrados principales):



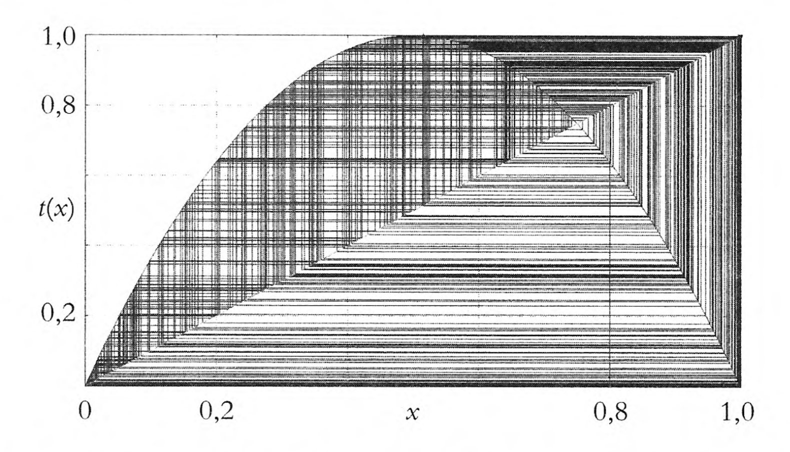
Atrevámonos, por último, a superar el valor crítico 3,569945, tomando $k=3,9$. La situación cambia radicalmente. Ésta es la órbita de $x_0=0,8$:



¡La órbita se ha vuelto caótica! No muestra ninguna pauta regular. No es ni siquiera cuasiperiódica. Salta de un sitio para otro; parece aleatoria. ¿Y si tomamos $k=4$?



¡El mismo comportamiento caótico! Y, al igual que la órbita, la telaraña también es caótica, porque recorre erráticamente el intervalo de números entre 0 y 1:



Pero la órbita y la telaraña de $x_0 = 0{,}8$ no son una excepción, porque todas las demás órbitas y telarañas posibles hacen exactamente lo mismo, mezclándose unas con otras. Se trata, de nuevo, del efecto baraja.

No obstante, las sorpresas no se han acabado: dos condiciones iniciales distintas, aunque estén inicialmente muy próximas, determinan órbitas que al cabo de cierto tiempo no se parecen en nada. Así, considerando $k = 4$, si estamos interesados en la evolución del dato inicial $a = 0{,}900$ y tomamos por error el dato inicial $b = 0{,}901$ (al medir hemos cometido un error del orden de una milésima), observaremos cómo las órbitas de a y de b terminan por alejarse sensiblemente más pronto que tarde, pese a estar próximas en un primer momento. En efecto, obte-

nemos por recurrencia que la órbita de *a* es {0,900, 0,360, 0,9216, 0,2890, 0,8219, 0,5854, 0,9708...} y la órbita de *b* es {0,901, 0,3568, 0,9180, 0,3012, 0,8419, 0,5324, 0,9958...}. Es decir, comprobamos cómo la diferencia inicial en una milésima llega a ampliarse considerablemente hasta el orden de las centésimas tras unas pocas iteraciones. De hecho, ¡se multiplica por 20 en tan sólo 7 iteraciones! Esto es lo que provoca que, tras cierto tiempo, la trayectoria real y la trayectoria que se había predicho poco o nada tengan ya en común. Otra vez aparece el efecto mariposa.

En resumen, variando sucesivamente los valores del parámetro k de la aplicación logística desde $k=2$ hasta $k=4$, hemos comprobado cómo el sistema va adentrándose poco a poco en la senda del caos. ¿Y dónde están las operaciones de estirado y plegado que producen el caos? Delante de nuestros ojos. La función logística $f(x)=kx(1-x)$ estira el intervalo de números entre 0 y 1 como consecuencia de multiplicar x por k, para, a continuación, doblarlo sobre sí mismo como consecuencia de multiplicar el resultado de kx por $(1-x)$, que es un número más pequeño que la unidad. Estira y dobla con forma de herradura, claro.

En busca del caos

A día de hoy, aunque no existe una definición canónica entre los matemáticos, hay acuerdo acerca de que el caos determinista pasa por ser la conjugación de los dos efectos —el efecto mariposa y el efecto baraja— que hemos visto plasmados tanto en la aplicación *shift* de Bernoulli como en la aplicación logística de May.

Ahora bien, ¿en qué clase de sistemas dinámicos cabe esperar un comportamiento caótico? ¿Dónde debemos buscarlo, si de verdad queremos encontrarlo? En primer lugar, como ya sabemos, en sistemas no lineales, porque sólo en éstos el efecto de una suma de causas puede muy bien no ser la suma de los efectos de cada una de las causas por separado, sino algo mucho más explosivo y sensacional. Y en segundo lugar, y esto es lo nuevo, en sistemas no integrables. Un sistema integrable es aquel cuyas trayectorias o soluciones pueden expresarse mediante funciones conocidas. Con otras palabras, por integrable se entiende la posibilidad de dar una expresión explícita de la solución; en resumen: una fórmula. Los sistemas integrables (sean lineales o no) son predecibles, porque disponemos de una fórmula que nos permite calcular directamente la órbita de cualquier punto para cualquier instante de tiempo. Por el contrario, en los sistemas no integrables, la solución no puede obtenerse por medio de una fórmula, con lo que no es posible hacer predicciones

en el tiempo hasta el infinito. Además, si nos pusiéramos las gafas de topólogo de Poincaré veríamos que cuando un sistema es no integrable es porque sus trayectorias están muy enmarañadas.

Si cruzamos estas dos categorías obtenemos ya una pista importante: son los sistemas no lineales y no integrables aquellos que pueden exhibir un comportamiento irregular, imprevisible, que sea indicio de la presencia del caos. Pero conviene apuntar que, aun cuando el caos exige la no linealidad (para que pequeños cambios puedan producir grandes cambios) y la no integrabilidad (para que no podamos predecir a tiempos grandes), una dinámica no lineal y no integrable no tiene por qué ser necesariamente caótica. Hay sistemas no lineales y no integrables que muestran movimientos regulares y previsibles. Estas dos características, no linealidad y no integrabilidad, son, como dicen los matemáticos, condiciones necesarias pero no suficientes.

Por otro lado, dentro de los sistemas no lineales y no integrables, que son, repitámoslo, los únicos candidatos a sistemas caóticos, hay que distinguir dos tipos: los sistemas hamiltonianos, que conservan la energía, y los sistemas disipativos, que no la conservan. Estos dos tipos de sistemas nos van a dar los dos tipos de caos determinista que se conocen hoy día.

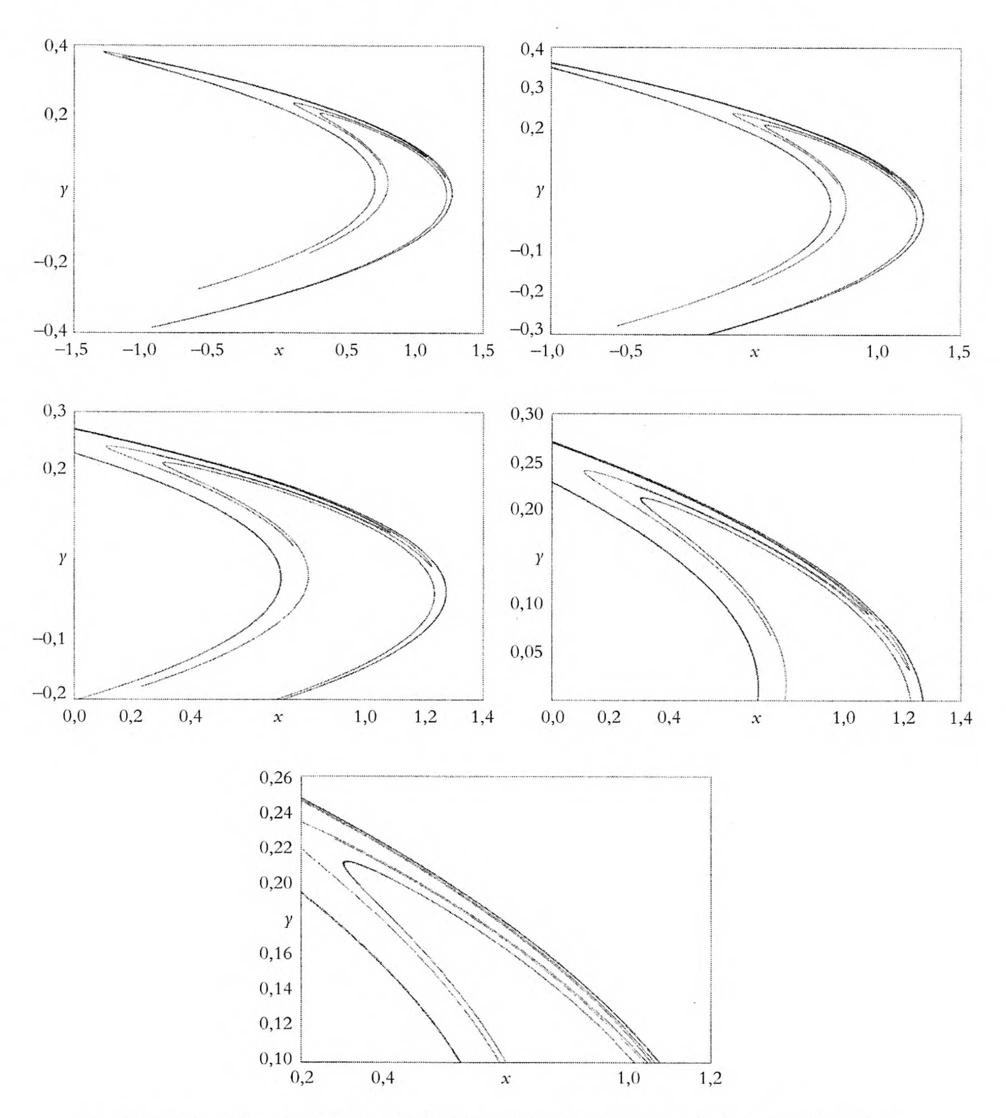
El caos hamiltoniano es el que se da en los sistemas que conservan la energía, como, por ejemplo, el sistema de los tres cuerpos estudiado por Poincaré, el sistema estelar estudiado por Hénon y Heiles, o los billares de Hadamard y Sinái. Este comportamiento caótico tiene, como se ha visto en los capítulos 1 y 2, origen homoclínico, debido al número infinito de intersecciones que tiene lugar entre las separatrices del punto de silla, lo que provoca un enredo monumental de las trayectorias. Pero estos sistemas, aunque presentan dinámicas muy complejas, carecen del menor rastro de la presencia de atractores «extraños» o «patológicos». Porque hay un famoso teorema matemático, el teorema de Liouville, que establece que la conservación de la energía impide la aparición de atractores, puesto que éstos constituyen estructuras disipativas en las que la energía va perdiéndose a medida que el sistema va siendo atraído hacia el atractor.

A diferencia de éste, el caos no hamiltoniano —a menudo denominado caos a secas— es el que se da en los sistemas que no conservan la energía, como, por ejemplo, el sistema de Lorenz. Al no conservarse la energía, estos sistemas presentan atractores, por lo que originan algunas de las configuraciones caóticas más conocidas: los atractores extraños, que son el puente entre la teoría del caos y la geometría fractal.

Un atractor extraño es un atractor de un sistema caótico que posee geometría fractal. Y un fractal es un objeto geométrico rugoso, irregular, dotado de infinitos detalles, autosemejante y que probablemente tiene dimensión matemática fraccionaria. Los atractores extraños son estructuras complicadas que si se amplían sucesivamente muestran la autosemejanza de los fractales. Siempre aparece y reaparece la misma estructura. Las partes se parecen al todo. Además, muchos de ellos tienen dimensión fraccionaria. Es decir, si estamos en el plano, nuestro atractor fractal tendrá dimensión mayor que 1 pero menor que 2, por ejemplo, de uno y medio: ocupa más que una curva, pero menos que una superficie. Y si estamos en el espacio, tendrá dimensión mayor que 2 pero menor que 3, por ejemplo, de dos y cuarto: ocupa más que una superficie pero menos que un cuerpo. Esto significa tener dimensión fractal, no entera. El atractor de Lorenz, por ejemplo, tiene una dimensión de alrededor de 2,06. Curiosamente, pese a que desde su descubrimiento se ha dado por supuesto, el carácter «extraño» del atractor de Lorenz (es decir, su condición de conjunto atractor de un sistema caótico, con probable geometría fractal) todavía no estaba demostrado matemáticamente en el año 2000. De hecho, en 1998, Stephen Smale propuso su demostración como uno de los problemas matemáticos abiertos para el siglo XXI. En 2002, el matemático Warwick Tucker logró probar su existencia con todo rigor en un artículo titulado «El atractor de Lorenz existe». El atractor con forma de mariposa que Lorenz visualizó en la pantalla de su computadora no era una ficción, es real. Y lo mismo sucedió con el atractor extraño de Hénon, que fue descubierto con ayuda de un ordenador en 1976, pero cuya existencia no pudo ser probada matemáticamente hasta 1987, de la mano del matemático sueco Lennart Carleson (Premio Abel en 2006).



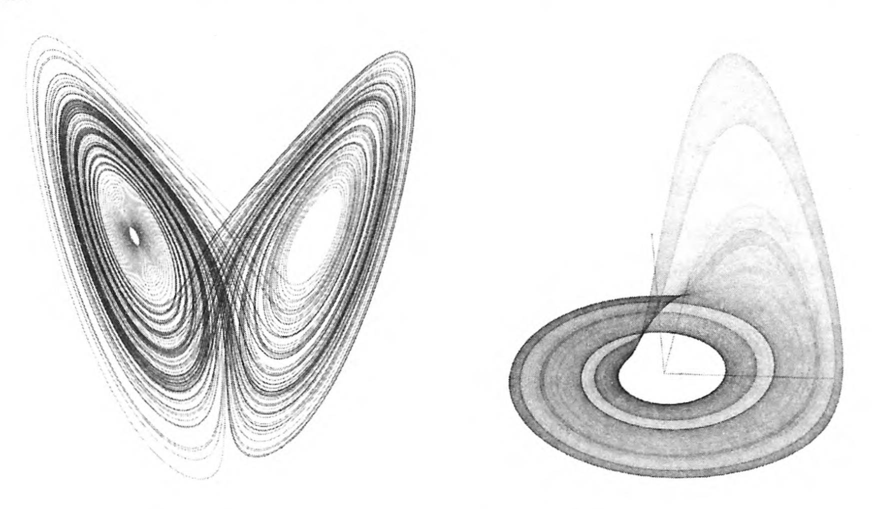
Atractor extraño de Ueda. Este atractor, que parece un remolino, es la sección de Poincaré de un sistema caótico.



De izquierda a derecha y de arriba abajo, sucesivas ampliaciones del atractor de Hénon. Todas muestran el mismo patrón (rayas que se desdoblan en más rayas).

El atractor de Rössler, en cambio, ha corrido peor suerte. Otto Rössler propuso unas ecuaciones que describen el comportamiento de la reacción química de Belousov-Zhabotinsky, una reacción oscilante en la que los compuestos se juntan y se separan continuamente, produciendo una serie de cambios espectaculares de color rojo-azul. La simulación computacional de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales mostró un comportamiento caótico similar al que estudió Lorenz en

su sistema y, más aún, sugería heurísticamente —como le ocurrió a Lorenz— la presencia de un atractor extraño, el atractor extraño de Rössler, cuya existencia aún no ha sido demostrada. Nadie sabe todavía si es real, si debajo del lío de trayectorias se oculta un atractor, o sólo se trata de una ilusión por ordenador... generada por *Matrix*.



Atractores extraños de Lorenz (izquierda) y Rössler (derecha). Este último aún espera que algún matemático demuestre su existencia.

Y ¿qué implicaciones tiene que el atractor posea geometría fractal para la dinámica? Podríamos pensar que ninguna; a fin de cuentas, ¿qué tiene que ver el tocino con la velocidad? Pero nos equivocaríamos. Si algo debemos aprender de Poincaré, Smale y Lorenz es que la dinámica se basa siempre en la geometría.

En los atractores clásicos, los únicos conocidos hasta no hace mucho —los puntos fijos y los ciclos límite—, las órbitas vecinas siguen estando cerca, los pequeños errores permanecen (como esperaba Laplace) acotados, y es posible avanzar predicciones a largo plazo. En cambio, en los atractores extraños, los propios de los sistemas caóticos, la situación difiere significativamente: dos órbitas con condiciones iniciales próximas divergen de forma muy rápida y sólo permanecen cercanas durante un corto periodo de tiempo. Si, para imaginar lo que ocurre con las trayectorias vecinas en un atractor extraño, colocáramos bajo su acción una pequeña gota de colorante, veríamos cómo la gota se convertiría en un hilo extremadamente largo y fino, enroscado por todo el atractor. Pese a que nuestros puntos marcados estarían muy juntos al inicio, terminarían repartidos por cualquier parte del atractor.

Una predicción del estado final de cualquiera de esos puntos en concreto es, si se comete cualquier pequeño error de medida, imposible, ya que el estado final puede encontrarse en cualquier región del atractor extraño. El caos confunde entre sí las órbitas del mismo modo que el panadero mezcla la masa del pan cuando la trabaja. La clave está, como siempre, en la geometría, en las operaciones de estirado y plegado. Las órbitas deben estirarse, amplificando los errores (efecto mariposa), pero también deben plegarse sobre sí mismas, lo que enreda unas con otras en su confinamiento hacia el atractor (efecto baraja). Los estirones amplían las incertidumbres, y los pliegues, al acercar trayectorias en principio separadas, destruyen la información de partida. Las trayectorias se mezclan entre sí como los naipes en el mazo de un tahúr. Ahora bien, como el proceso de estirar y doblar debe repetirse *ad infinitum*, los atractores de los sistemas caóticos tienen que presentar pliegues y más pliegues dentro de cada pliegue. Esto determina que los atractores caóticos sean mucho más complejos geométricamente que sus hermanos clásicos. Son objetos que van revelando detalles y más detalles a medida que su imagen se va ampliando. De hecho, presentan un detallismo infinito, con una característica fundamental: son autosimilares, dado que su estructura microscópica presenta la misma complejidad que su estructura macroscópica. Son, en una palabra, fractales.

Pequeños ejemplos

Admitiendo que existen sistemas matemáticos que ofrecen una dinámica caótica, ¿cuál es la relevancia real de este fenómeno? ¿Son los sistemas caóticos casos patológicos o, por el contrario, tienen importancia en el mundo físico? ¿Es lo caótico la norma o la excepción? ¿En qué sistemas físicos encontramos caos matemático?

El caos es ubicuo, se manifiesta por doquier, tanto en el movimiento de los cuerpos celestes (problema de los tres cuerpos) como en el comportamiento de un péndulo doble, de los fluidos al borde de la turbulencia (flujo de Rayleigh-Bénard), de algunas reacciones químicas (reacción de Belousov-Zhabotinsky), de ciertas poblaciones biológicas, etc. Y el descubrimiento de esa ubicuidad del caos es, desde luego, la tercera gran revolución de la ciencia del último siglo, tras la relatividad y la mecánica cuántica.

Por ejemplo, dentro del sistema solar, un movimiento caótico digno de mencionarse lo constituye el movimiento tambaleante de Hiperión, una de las lunas de Saturno, cuya forma de patata provoca un deambular en apariencia fortuito. Este satélite gira de forma regular alrededor de Saturno, pero su modo de girar es real-

mente desordenado: presenta un movimiento caótico rápido que se manifiesta como una imprecisión en la orientación del satélite como cuerpo rígido en un intervalo de 6 horas. Hiperión va dando, literalmente, tumbos en su movimiento de rotación.

Además, en 1988 dos científicos del MIT, G. Sussman y J. Wisdom, presentaron la evidencia numérica de que el movimiento de Plutón es también caótico. En realidad, la trayectoria de Plutón es particularmente interesante, porque su órbita se cruza con la de Neptuno, y podría ser que en un futuro no muy lejano estuvieran

BUSCANDO EL CAOS DE LA MANO DE FEIGENBAUM

Mitchell Feigenbaum (n.1944) es un físico matemático, pionero en los estudios del caos con ayuda de una computadora. En 1975, jugando con su ordenador, gracias al método ensayo-error descubrió cierto número —hoy llamado «constante de Feigenbaum» o «constante del caos»— que caracteriza la transición del movimiento periódico al movimiento caótico. De hecho, en nuestro estudio de la aplicación logística ya habíamos observado este fenómeno sorprendente: a medida que variábamos poco a poco el valor del parámetro k del cual depende, los periodos de las órbitas iban duplicándose, es decir, multiplicándose por dos. Esto es, pasábamos de tener órbitas de periodo 1 a órbitas de periodo 2, 4, 8, 16, 32, etc., hasta llegar al caos una vez superado el valor crítico de k, es decir, 3,569945.... Tan rápida es la cascada de duplicación del periodo desde $k=2$ hasta alcanzar ese valor, que el periodo termina por duplicarse infinitas veces, dejando paso al caos. Conforme k aumenta, también lo hace la complejidad del sistema logístico: estacionario → periódico → caos. Si representamos el punto o los puntos a los que converge la órbita de $x=0{,}8$ por la aplicación logística para diferentes valores del parámetro k, obtenemos el diagrama de la página siguiente.

En dicho gráfico, los valores de k aparecen representados en el eje horizontal, mientras que los valores a los que tiende la órbita de $x=0{,}8$ lo hacen en el eje vertical. Fijado un valor de k, el corte vertical nos da una imagen del atractor correspondiente en el intervalo entre 0 y 1. Por ejemplo, para $k=3{,}0$, la línea vertical sólo corta la gráfica en un punto; eso quiere decir que estamos ante un punto de periodo 1, un punto fijo. Otro ejemplo: para $k=3{,}2$, la línea vertical corta la gráfica en dos puntos; eso quiere decir que nuestra órbita es un 2-ciclo. Pues bien, según nos movemos horizontalmente, desde $k=2{,}4$ a $k=4$, las ramas del árbol de Feigenbaum van bifurcándose, como consecuencia de las duplicaciones de periodo. Y superado el valor crítico 3,569945... (el punto de caos), el atractor, que viene dado por cada línea vertical, se convierte en una banda caótica. Es, de hecho, un fractal (un conjunto de Cantor). No obstante, existen ventanas de periodicidad superado ese límite. Por ejemplo, pasado el valor 3,82, existe una franja

lo suficientemente próximos como para perturbarse mutuamente, desencadenando una catástrofe cósmica. Sirviéndose de una supercomputadora, Sussman y Wisdom calcularon la trayectoria de Plutón durante los próximos 845 millones de años y hallaron que, debido a la incertidumbre en las condiciones iniciales, dos de dichas condiciones en un principio cercanas determinaban dos trayectorias que divergían notablemente en un lapso de tan sólo 20 millones de años, un margen de tiempo muy corto si se tiene en cuenta que la edad del sistema solar se estima, por lo bajo,

del diagrama en que sólo se visualizan tres puntos de corte con una línea vertical imaginaria, uno arriba, otro en medio y otro abajo; es decir, nuestra órbita es ahora un 3-ciclo. Y dado que, como vimos, periodo tres implica caos, lo que viene a continuación —de nuevo un revoltijo caótico de puntos— no puede ya sorprendernos.

Feigenbaum calculó los cocientes de las distancias relativas entre bifurcaciones —para entendernos, entre los tamaños de las ramas del árbol— y observó que en el límite daban un valor 4,669201..., que es independiente de la aplicación que se considere —sea la logística o cualquier otra— y que es, por tanto, universal. Aunque Feigenbaum encontró su constante de un modo práctico o heurístico, no dentro de una demostración formal, su descubrimiento ya se consideró, y se sigue considerando, genial.

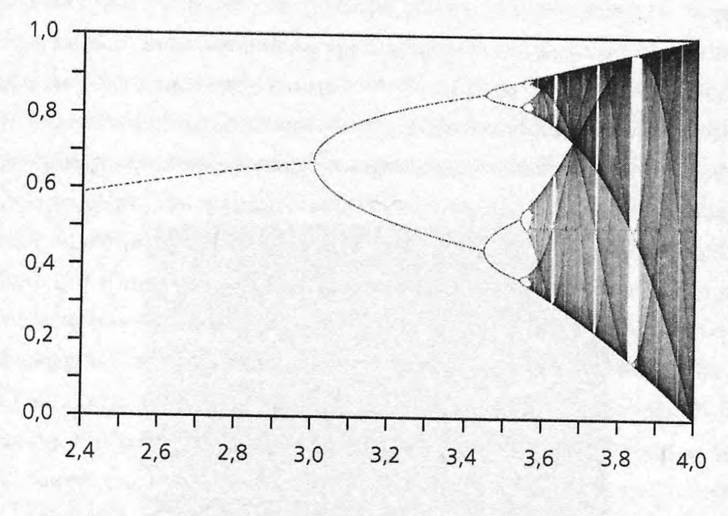
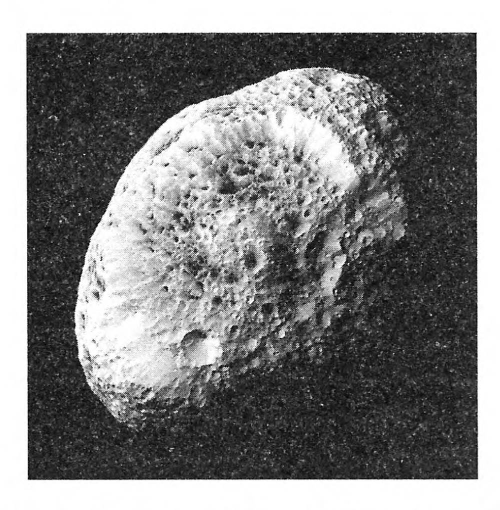


Diagrama de bifurcación o de Feigenbaum de la aplicación logística.

en unos 4.500 millones de años. Por suerte, para nuestro planeta aparece un caos más lento: la imprecisión en la posición de la Tierra hace aparición en un lapso de tiempo de 100 millones de años.



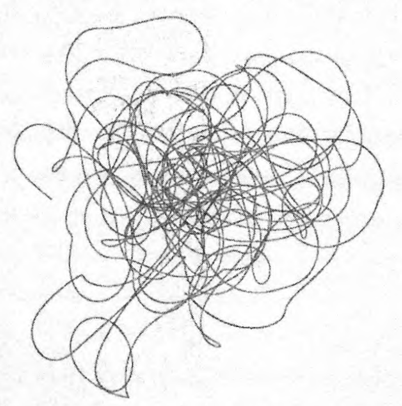
Hiperión, el irregular satélite de Saturno, fotografiado por la nave Cassini-Huygens.

Pero hay más ejemplos que muestran cómo el caos ha modelado a su imagen y semejanza nuestro sistema solar. Por ejemplo, el cinturón de asteroides que hay entre Marte y Júpiter se mueve bajo la acción del Sol, pero está sometido a las perturbaciones debidas a Júpiter, por lo que constituye un sistema de tres cuerpos (Sol + Júpiter + asteroides). En este sistema, algunos movimientos son regulares, mientras que otros son caóticos; así, los asteroides que se mueven regularmente permanecen en sus órbitas, pero los que siguen trayectorias caóticas terminan por salirse y perderse en el espacio pasado algún tiempo. La distribución de los asteroides en el cinturón no es, por tanto, uniforme, sino que presenta franjas vacías: los huecos de Kirkwood, llamados así por el astrónomo estadounidense que los descubrió, allá por 1860. Si en su giro alrededor del Sol un asteroide atraviesa una de las zonas prohibidas de Kirkwood, su periodo de revolución «resonará» con el de Júpiter y el gigante gaseoso lo sacará de su órbita, y tal vez, si se dirige a Marte o, peor aún, a la Tierra, se pondrá fin a la aparente armonía que observamos en el sistema solar. Curiosamente, algo parecido ocurre con las franjas vacías en los anillos de Saturno, donde las partículas que giran en zonas de resonancia acaban por salirse y formar huecos.

En realidad, lo más sorprendente de todo no es que múltiples sistemas complejos —como el sistema solar o el tiempo, el clima y la atmósfera (a los que volvere-

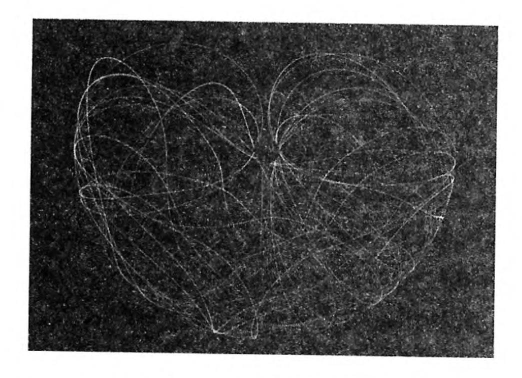
UN MUNDO ANTINEWTONIANO

El físico estadounidense Julien C. Sprott (n.1942) ha imaginado un mundo paralelo al nuestro en el que las dos primeras leyes de Newton son verdad, pero la tercera, la ley de acción y reacción, es falsa. En este extraño mundo las fuerzas entre dos cuerpos que interactúan no son iguales en magnitud y contrarias en dirección, sino iguales en magnitud e iguales en dirección. Es decir, cuando la rana posada sobre la hoja de nenúfar va a saltar, no empuja la hoja hacia atrás, sino hacia adelante, arrastrándola con ella. En consecuencia, se deriva una dinámica que muestra algunos aspectos muy curiosos y poco familiares, entre los que se incluye el caos dentro del problema de dos cuerpos. Es la dinámica antinewtoniana.



Órbita caótica en el problema antinewtoniano de los dos cuerpos.

mos en los próximos capítulos)— presenten caos, sino que sistemas extremadamente simples, como por ejemplo un péndulo, también pueden presentarlo. En efecto, si tomamos en consideración un péndulo doble, que consiste en un péndulo de cuyo extremo cuelga otro péndulo, observaremos que por encima de cierto nivel de energía el movimiento del sistema se hace caótico. Cuando se trata de un único péndulo, el movimiento es bastante simple, pero cuando acoplamos los dos péndulos las oscilaciones se vuelven completamente impredecibles.



Movimiento caótico descrito por un péndulo doble.

EL GRIFO MAL CERRADO

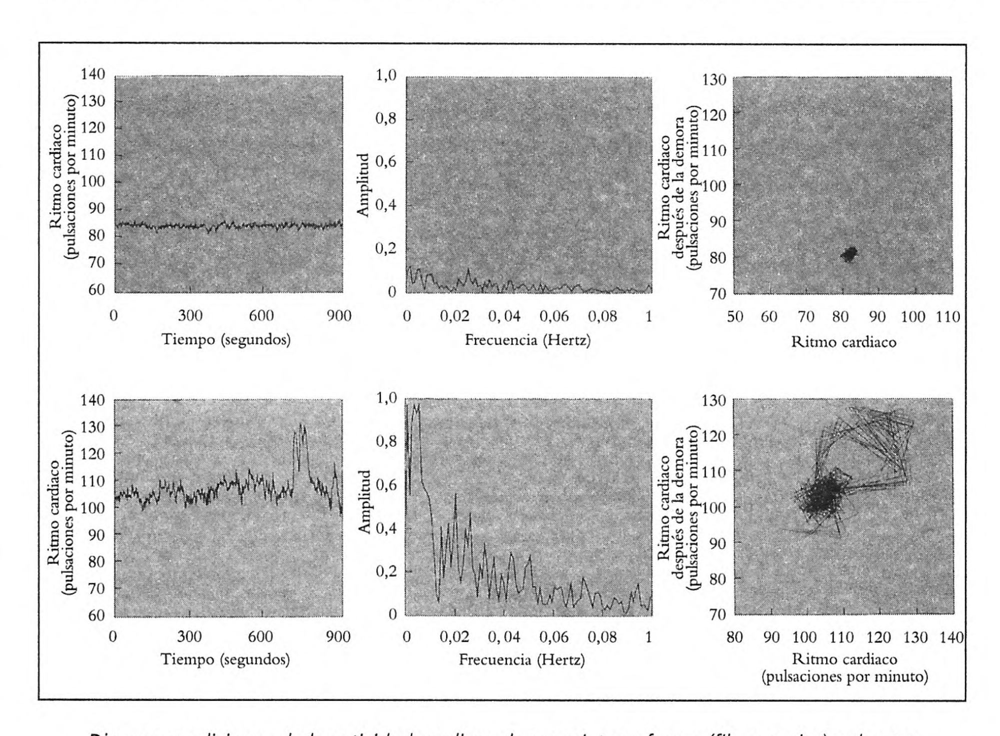
La mayoría de nosotros hemos observado alguna vez la caída de las gotas de agua de un grifo mal cerrado, pero lo que no todo el mundo sabe es que detrás de este fenómeno se esconde un comportamiento caótico. En efecto, muchas veces la pauta de caída de las gotas no es regular, sino aperiódica e impredecible. En una palabra: caótica.
El estudio de este hecho fue realizado por Robert Shaw en colaboración con otros científicos de la Universidad de California. El experimento comenzó midiendo con un micrófono los intervalos temporales entre la caída de las gotas. Una vez obtenida esta serie temporal, se agruparon los valores de dos en dos, formando una secuencia de pares de números, de puntos en el plano. Representándola, los investigadores obtuvieron una sección del atractor subyacente. Cuando el ritmo de caída era periódico, se dibujaba una especie de ciclo límite. Pero cuando el ritmo se hacía aleatorio, aparecía una suerte de atractor extraño. No se trataba de una mancha, sino de una estructura dotada de una cierta geometría intrínseca. Una forma de herradura, que es la firma más sencilla del proceso de estirado y plegado que da lugar al caos. La aleatoriedad se apoyaba en un «andamio» determinista.

Grandes aplicaciones

En los últimos años, la influencia de la teoría del caos, de la dinámica no lineal y, en general, de las ciencias de la complejidad, ha supuesto un fuerte estímulo para las ciencias de la vida (biología, medicina, etc.). En efecto, la colaboración entre ciencias «duras» y «blandas» ha llevado, en pocos años, a una simbiosis muy productiva. Si hacemos un poco de memoria, entresacaremos una buena lección. Hasta bien entrado el siglo XX, la medicina y la física permanecieron separadas por un muro muy compacto y poco permeable, excepto por la irrupción de las radiaciones en la terapia y el diagnóstico del cáncer. Pero, a partir de la década de 1950, el muro se hizo más y más poroso, por lo que todos hemos salido ganando. Por poner un solo ejemplo, podemos hablar de las imágenes médicas gracias al desarrollo conjunto de las matemáticas, la física y la medicina.

De forma análoga, la teoría del caos ha pasado de ser un nexo entre desarrollos en principio alejados de la realidad a ser una herramienta muy potente en manos expertas que utilizan el mismo lenguaje que los médicos. En este sentido, la aplicación médica de la teoría del caos no permite predecir con exactitud ni resolver problemas puntuales, sino que más bien «caracteriza» —mediante ciertos «números

mágicos», como los exponentes de Liapunov, la dimensión fractal, etc.— algunos comportamientos de esos sistemas tan complejos como son los sistemas biológicos. Dicho con otras palabras: la teoría del caos puede ayudar a clasificar estados. Posiblemente, el mérito no esté en el valor del número obtenido sino en la reformulación de los problemas médicos, pasando de una forma observacional a otra modelable y medible. La cardiología, la electroencefalografía y la magnetoencefalografía aportan, en este sentido, buenas ilustraciones. En pocos años los estudios sobre caos y fractales en fisiología pueden proporcionar medios más sensibles para caracterizar, por ejemplo, la disfunción producida por el envejecimiento o la enfermedad. Resumiendo, el gran descubrimiento es el siguiente: los seres humanos somos complejos y caóticos cuando estamos sanos, y rígidamente ordenados cuando enfermamos.



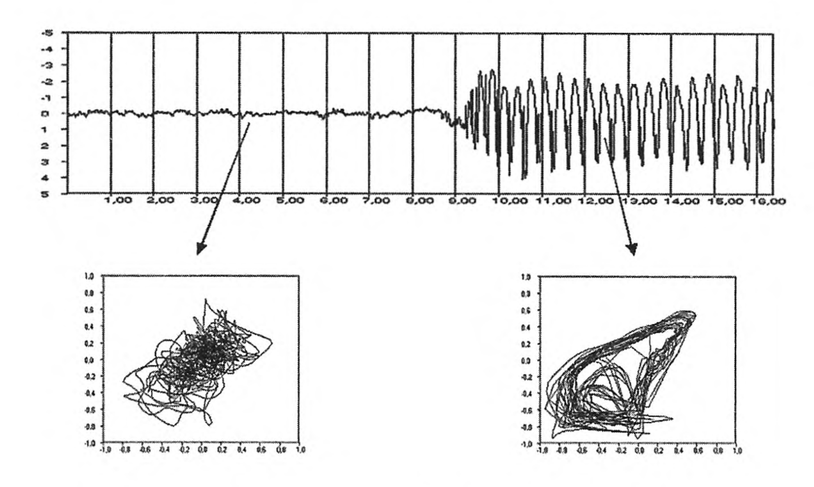
Diversas mediciones de la actividad cardiaca de un sujeto enfermo (fila superior) y de otro sano (fila inferior). Cuando dicha actividad es periódica y predecible indica una cardiopatía, mientras que en el individuo sano las mediciones resultan caóticas.

Experimentalmente, el problema reside en reconstruir, a partir de la serie temporal observada o medida (el ritmo cardiaco o los pulsos cerebrales), la evolución del sistema dinámico (el corazón o el cerebro) en el espacio de fases, donde pode-

mos medir bien y calcular los números mágicos del caos: los exponentes de Liapunov, la dimensión fractal... Es en este momento cuando un truco muy ingenioso ideado por David Ruelle y Floris Takens viene en nuestra ayuda: se trata de considerar valores retrasados con el fin de reconstruir de algún modo la forma del atractor del sistema. Si tenemos la serie de datos x_1, x_2, x_3, x_4,... podemos formar el conjunto de pares (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4)... Estos puntos determinan una trayectoria en el plano. Si agrupáramos los datos de tres en tres, obtendríamos una trayectoria en el espacio. La dinámica de nuestro sistema queda, pues, representada por la dinámica de este conjunto de puntos, y es ahora cuando podemos calcular la dimensión fractal o los exponentes de Liapunov. Existe un teorema matemático que afirma que, según reconstruimos con mayores retrasos (es decir, en vez de agrupar los datos de dos en dos o de tres en tres, hacerlo de cuatro en cuatro o de cinco en cinco, etc.), si el sistema es periódico, la dimensión fractal crece hasta un valor y luego se mantiene constante y entera (no es, pues, fractal, fraccionaria). En cambio, si el sistema es caótico, la dimensión fractal se estabiliza para cierto valor fraccionario y al menos un exponente de Liapunov es positivo.

Pero ¿realmente sirve de algo todo este aparato matemático? La respuesta, nos guste o no, es que sí, desde luego. A grandes rasgos podemos afirmar que dinámicas simples implican enfermedad, mientras que dinámicas complejas (caóticas) implican salud, por paradójico que parezca, pues es lo contrario de lo que uno pensaría. Así, la enfermedad supone una pérdida de complejidad y el aumento de regularidad nos acerca a la muerte. En efecto, la aparición de regularidades en los ritmos cardiacos o en los pulsos cerebrales de los pacientes críticos es un mal síntoma. Si se miden las señales eléctricas cerebrales mediante electrodos, la curva resultante de tal análisis parece, en principio, caótica (aperiódica) y fractal (autosemejante, arrugada). Y si se aplica el método de Ruelle-Takens de reconstrucción del atractor con retrasos, se observa que los pacientes sanos muestran atractores extraños, mientras que aquellos con encefalopatías determinan ciclos cuasiperiódicos.

Por último, hay que destacar la semejanza manifiesta entre algunos órganos humanos y diversos fractales. Un ejemplo de ello son los bronquios. ¿Por qué tienen una estructura casi fractal, dotada de ramificaciones y más ramificaciones? Pues posiblemente porque los fractales, al poseer dimensión fraccionaria (fractal), son los perfectos intercambiadores de dimensión. Así, los bronquios, con una dimensión fractal aproximada de dos y algo, son el puente perfecto para pasar de un tubo de transporte tridimensional (dimensión 3) a un plano de difusión bidimensional (dimensión 2), es decir, para pasar el oxígeno del aire a la sangre.



Si la dinámica cerebral es arrugada, determinando una especie de atractor extraño (izquierda), la persona está sana. Sin embargo, cuando se convierte en periódica, determinando un ciclo límite (derecha), señala que el paciente sufre un ataque epiléptico (fuente: C.J. Stam, «Nonlinear Dynamical Analysis of EEG and MEG: Review of an Emerging Field», Clinical Neurophysiology 116/10, 2005).

CAOS CUÁNTICO, LA ÚLTIMA FRONTERA

¿Podría el indeterminismo de las partículas subatómicas ser fruto de la impredictibilidad que asociamos con el caos? No. La teoría del caos pide ecuaciones no lineales, mientras que la mecánica cuántica se sustenta en una ecuación lineal (la ecuación de ondas de Schrödinger). En consecuencia, hablando con propiedad, no puede haber efecto mariposa cuántico, ya que la linealidad de las ecuaciones cuánticas no casa con la no linealidad que exige el caos. Pero, al pasar de un sistema clásico caótico al sistema cuántico asociado (algo así como si lo fuéramos empequeñeciendo y empequeñeciendo), aunque el caos desaparece, deja alguna traza en forma de fluctuaciones entrelazadas. El estudio de estas trazas ha sido bautizado como «caología cuántica» o «mecánica cuántica posmoderna». Y es que, aunque la mecánica clásica es determinista, también es caótica; en cambio, la mecánica cuántica es probabilista (en ella intervienen el azar y la probabilidad) pero regular. La mecánica cuántica nos ha salvado, por tanto, de la maldición del caos... aunque al precio de que nos parezca que los electrones, los fotones y todas las demás partículas cuánticas están locas.

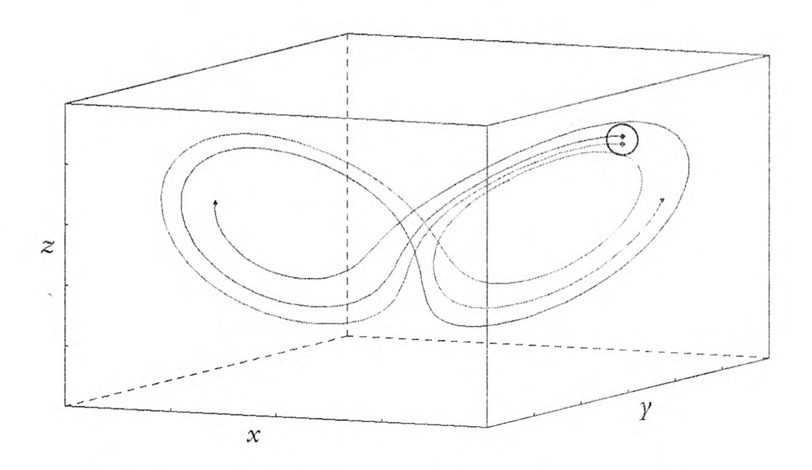
Una nueva impredictibilidad

El marqués de Laplace creía firmemente que un sistema determinista, un sistema que siguiera las leyes de Newton, tenía que ser a la fuerza predecible. Sin embargo, el nuevo descubrimiento ha sido que un sistema dinámico que obedezca las leyes de Newton puede, en efecto, convertirse en caótico y prácticamente impredecible. Así pues, una de las consecuencias más revolucionarias y dramáticas de la teoría del caos es que refuta la ecuación «determinismo = predictibilidad».

Probablemente la razón de que durante tres siglos se haya identificado de forma ingenua el determinismo y la predictibilidad haya sido la tendencia a considerar recurrentemente sistemas lineales y sólo lineales, desechando los no lineales. De esta manera, el universo entero parecía un mecanismo de juguete, tan predecible como el lanzamiento de una bola de cañón o el funcionamiento de un reloj.

El caos, por paradójico que parezca, es determinista —está generado por reglas fijas que no dejan lugar al azar—, pero impone límites fundamentales a la predicción. Si cometemos un pequeño error al medir el estado inicial de nuestro sistema (y esto sucede siempre en tanto que en la vida real funcionamos con redondeos y truncamientos), la ecuación dinámica generará una predicción que habrá propagado y ampliado el error inicial. El obstáculo a la predicción procede, pues, de la conjunción entre una realidad práctica (la precisión finita de toda medida) y la estructura matemática caótica de la ecuación de evolución (que infla exponencialmente el error). La validez de la predicción queda, sobre todo a largo plazo, severamente limitada.

Ahora bien, aunque el caos sea impredecible, sigue siendo determinista; esto es, si dos sistemas caóticos prácticamente idénticos del tipo apropiado son impelidos o forzados por la misma señal, producirán la misma salida, aun cuando nadie pueda decir qué salida será. El caos es, repitámoslo de nuevo, el comportamiento aleatorio o estocástico que ocurre dentro de los sistemas deterministas. Así, por ejemplo, el clásico lanzamiento de un dado puede tomarse como ejemplo de proceso azaroso que en realidad es perfectamente determinista. El lanzamiento de un dado procede del mismo modo que el lanzamiento de una bala de cañón. Lo único que ocurre es que resulta difícil predecir o calcular cuál es la cara precisa del dado que vamos a observar, ya que cualquier pequeño cambio en la posición y la velocidad de lanzamiento del dado determinará un resultado completamente distinto. La fuente de la aleatoriedad reside en la elección de las condiciones iniciales. Salvo que pudiéramos controlarlas exactamente, no podríamos realizar predicción alguna.



Separación de dos trayectorias inicialmente próximas sobre el atractor de Lorenz. Ambas parten del mismo entorno (señalado por un círculo), pero al cabo de cierto tiempo cada una se encuentra en un lóbulo distinto del atractor.

Filosóficamente, el caos plantea una cuestión muy seria que afecta incluso al método científico. El procedimiento clásico para testar una teoría científica consiste en hacer predicciones y comprobar si se pueden verificar. Ahora bien, si los fenómenos son caóticos, no podemos hacer predicciones a medio o a largo plazo; eso es algo intrínsecamente imposible. Supongamos, por tanto, que un matemático describe un proceso físico mediante unas ecuaciones que muestran caos, esto es, mediante unas ecuaciones que recogen una dinámica sensible a las condiciones iniciales, en que existen trayectorias aleatorias que están mezcladas con las trayectorias periódicas. Si nuestro matemático busca, al modo de los matemáticos clásicos, «predecir», dada una condición inicial, adónde irá a parar el sistema a largo plazo, su respuesta necesariamente será ésta: «Sólo puedo hacerlo si me dan el punto inicial con precisión infinita». Pero como esto es imposible en la práctica, el comportamiento a largo plazo del sistema está completamente abierto. Ningún físico que se encuentre con ecuaciones como éstas se arriesgará a trabajar con ellas. ¿Para qué? Obtendrá resultados completamente aleatorios. De hecho, esto mismo fue lo que les pasó al meteorólogo Edward Lorenz o al astrofísico Michel Hénon, cuyos trabajos no fueron valorados al principio por sus colegas científicos.

El meollo filosófico de la cuestión es, pues, el siguiente: como el caos implica una dependencia sensible a las condiciones iniciales, esto supone que los inevitables errores al fijar las condiciones iniciales se inflarán exponencialmente, lo que a su vez

implica que las predicciones prácticas de un modelo caótico habrán de ser «ostentosamente» erróneas. Por lo tanto, la pregunta que surge ahora es: ¿qué clase de modelización puede darse si ha de existir un error predictivo espectacular y generalizado? ¿Cómo puede un modelo ser a la vez caótico y útil?

La respuesta es la siguiente: los sistemas caóticos pueden ser enormemente predictivos de una serie de modos, aunque el caos plantea límites severos a la disponibilidad de «un» tipo de predicción.

Lo primero que se debe aclarar es que, frente a la creencia común, las predicciones de los sistemas caóticos pueden ser exitosas a corto plazo. Es cierto que, por precisa que sea nuestra medida de las condiciones iniciales, como siempre se comete algún error, éste terminará por inflarse notablemente y la evolución dinámica en detalle del sistema caótico no tardará en volverse impredecible, pero, atención, esa impredictibilidad no tiene por qué ser inmediata. De hecho, mientras sobreviene, puede predecirse a corto plazo la trayectoria del sistema caótico; otra cosa es a medio o largo plazo.

Y si no hay predictibilidad a medio o largo alcance... ¿queda inane la ciencia? Pues no, porque restan los aspectos cualitativos, no cuantitativos. Poincaré regresa para contárnoslo con su habitual claridad:

> «Nos encontramos al físico o al ingeniero que nos dicen: "¿Podría usted integrarme esta ecuación diferencial? La necesitaré dentro de ocho días para tal construcción que debe estar terminada para tal fecha." "Esta ecuación —responderemos— no entra en uno de los tipos integrables, y usted bien sabe que no hay más." "Sí, lo sé, ¿pero entonces para qué sirve usted, señor matemático?" Antes no se consideraba resuelta una ecuación sino cuando se había expresado la solución con ayuda de un número finito de funciones conocidas; pero esto apenas si es posible más que en el uno por ciento. Lo que siempre podemos hacer es resolver el problema "cualitativamente", es decir, tratando de conocer la forma general de la curva que representa la función desconocida.»

Y es que el caos revela relaciones, formas y estructuras allí donde nadie las había sospechado. Hay orden en el caos: el azar tiene una forma geométrica subyacente (los estiramientos y plegados de los atractores extraños). En estos casos, la verificación de una teoría científica habrá de tener en cuenta otros factores, basándose en contrastaciones geométricas (cualitativas) antes que experimentales (cuantitativas).

Una ilustración de rabiosa actualidad nos la proporcionará en los próximos capítulos el tema del cambio climático, en el que los meteorólogos y climatólogos sacrifican a menudo la predicción en aras de la comprensión. Encarados diariamente con un problema no lineal, están obligados a elegir: o bien un modelo preciso para predecir (algo que es, por definición, imposible de construir) o bien un modelo simplificado para comprender. Y lo cierto es que la ciencia no sólo sirve para producir predicciones, no sólo es un conjunto de recetas eficaces, sino que versa también sobre la naturaleza de las cosas.

Descartes, por ejemplo, con sus vórtices y sus átomos enlazados, lo explicaba todo y no predecía nada. Newton, por el contrario, con sus leyes y su gravitación, lo calculaba todo y no explicaba nada. La historia le ha dado la razón a Newton, ha relegado las construcciones cartesianas al campo de las fantasías gratuitas y los recuerdos de museo, y en cambio durante siglos ha puesto los aspectos predictivos en primer plano. La teoría newtoniana de la gravedad le ganó la partida a la teoría cartesiana de los vórtices, condenándola al desván de las teorías metafísicas. Y hete aquí que, de hecho, a los modelos matemáticos de la teoría del caos les ocurre lo mismo —aunque con algunos matices— que a los modelos cartesianos: son inherentemente cualitativos, no están preparados para la acción o la predicción, sino más bien para describir y comprender inteligiblemente los fenómenos naturales.

Si las matemáticas y la física de ayer se ocupaban de círculos y relojes, las de hoy se interesan por fractales y nubes...

Capítulo 4

Las matemáticas del cambio climático

Aquello que puede ser controlado jamás es totalmente real,
lo que es real jamás puede ser controlado.
Vladimir Nabokov

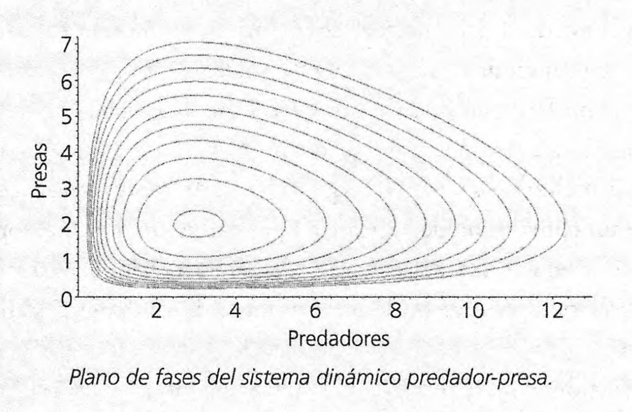
Probablemente, si la humanidad pudiera escribir una lista con los problemas más acuciantes que tiene abiertos de cara al tercer milenio, uno de ellos sería el del cambio climático. Éste es un problema poliédrico, es decir, que tiene múltiples caras. Una de ellas es la científica, pero también posee, como veremos, una cara económica y otra política. Tanto en este capítulo como en el siguiente nos acercaremos a este problema real con anteojos de matemático, puesto que en él las matemáticas del caos juegan un papel muy importante.

Matemáticas y ecología

El matrimonio entre la ecología y las matemáticas no es nuevo. De hecho, la ecología matemática es una rama de la biología con una edad más que respetable: se hizo mayor de edad hace ya dos siglos, en el siglo XIX, para ser exactos. En aquella época numerosos científicos comenzaron a aplicar los métodos matemáticos para estudiar la relación entre los seres vivos y el medio natural. A alguno de esos científicos ya lo conocemos, como por ejemplo a Pierre-François Verhulst, quien introdujo la aplicación logística para modelizar la dinámica de ciertas poblaciones. Otro fue el matemático y físico italiano Vito Volterra (1860-1940), famoso por formular un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales que describía la dinámica de un sistema biológico en que interactuaban dos especies, una predadora y la otra, su presa. Pero las matemáticas no sólo han sido de ayuda en la dinámica de poblaciones, sino que también han servido, avanzado el siglo XX, para modelar el tiempo meteorológico y el clima, dos sistemas en los que intervenimos los seres humanos.

CICLO PREDADOR-PRESA

Las ecuaciones predador-presa describen, por ejemplo, la variación en las poblaciones de lobos y conejos. Los conejos se reproducen exponencialmente, pero su número está limitado por la caza que llevan a cabo los lobos con el fin de alimentarse. A más conejos, más lobos. Pero también, a más lobos, menos conejos, con lo que la población de lobos termina reduciéndose. Y vuelta a empezar. Las trayectorias que el sistema determina en el plano de fases son, por tanto, órbitas periódicas.



Plano de fases del sistema dinámico predador-presa.

En este marco, el cambio climático se constituye como un problema científico multidisciplinario, ya que en él intervienen climatólogos, meteorólogos, físicos, geólogos, biólogos, economistas... La causa de esta multidisciplinariedad radica en que el sistema climático es complejo, está conformado por cinco subsistemas: atmósfera (aire), hidrosfera (agua), litosfera (tierra), criosfera (hielo) y biosfera (seres vivos). Es imposible comprender la infinita complejidad del medio ambiente sin explorar los múltiples acoplamientos que se dan dentro de los ecosistemas que alberga la Tierra.

Clima y tiempo meteorológico

Una de las causas por las que el cambio climático se ha convertido en uno de los temas estrella de la primera década del siglo XXI es de signo sociológico: cualquier episodio meteorológico extremo, que se salga de lo normal, aunque no tenga nada que ver con el cambio climático, puede ser grabado por un videoaficionado y posteriormente ser emitido por las televisiones de medio mundo. Así, por ejemplo, los

medios de comunicación atribuyeron al cambio climático los daños ocasionados en Indonesia por el tsunami de 2004 o por el huracán Katrina en Nueva Orleans en 2005. Sin embargo, el culpable de estas catástrofes no fue el cambio climático, ya que la primera fue de origen sísmico y la segunda se debió más bien a que los diques de la ciudad estaban en muy mal estado.

Tal vez lo primero que uno debe hacer es aprender a diferenciar entre el tiempo y el clima, es decir, entre la meteorología y la climatología. La diferencia entre ambos se sustenta en la distinta escala temporal a que cada uno de ellos hace referencia. El tiempo es el estado de la atmósfera en un lugar y un momento determinados. Por ejemplo: hoy en mi ciudad hace un tiempo soleado. Pero, en cambio, el clima es el estado de la atmósfera que ha sido observado durante años. Mejor dicho, el clima es, por definición, el estado promediado de la atmósfera que ha sido observado como tiempo meteorológico a lo largo de más de treinta años. Por ejemplo: mi ciudad tiene un clima húmedo, porque en general el tiempo meteorológico es lluvioso. De este modo, cierto día concreto del año, Madrid, Lisboa y Roma pueden tener el mismo tiempo meteorológico, aunque, sin embargo, están en zonas con clima distinto.

El clima es, por tanto, la sucesión periódica de tiempos meteorológicos sobre un lugar, lo que determina el estado más frecuente, es decir, «menos anómalo» de la atmósfera sobre él. En consecuencia, sucesos extraordinarios, como un tsunami o un huracán (salvo que se repitan con regularidad), no tienen que ver, en principio, ni con el clima ni con el cambio climático.

El calentamiento global

Pero, ¿qué es el cambio climático? ¿Hay o no hay cambio climático? En realidad, para ser precisos, el clima cambió, cambia y cambiará, porque —como ampliaremos más adelante— se trata de un sistema dinámico, es decir, de un sistema que evoluciona con el tiempo. Por ejemplo, a finales del siglo X, cuando Erik el Rojo condujo a los vikingos a Groenlandia se encontró con una tierra llena de pastos y carente de hielo (de ahí el nombre: *Greenland*, «tierra verde»), que le incitó a fundar una próspera colonia, pero luego, a principios del siglo XV, sobrevino la Pequeña Edad del Hielo e hizo avanzar los glaciares, impidiendo que los colonos vikingos sobrevivieran. No obstante, ésta no ha sido la única fluctuación del clima en nuestra era: si nos remontamos a los primeros siglos después de Cristo, nos encontramos con un periodo de calentamiento que coincidió con la caída del Imperio

Romano, o, sin ir tan atrás en el tiempo, desde mediados del XIX, cuando terminó la Pequeña Edad de Hielo, entramos en otro periodo de calentamiento, en el que nos encontramos, que sólo fue interrumpido por un leve enfriamiento entre 1940 y 1975.

A veces aturde lo pasajeras que llegan a ser las ideas. A mediados de la década de 1960, coincidiendo con ese periodo de enfriamiento global, numerosos ecologistas hablaban de una inminente glaciación. De hecho, muchos investigadores afirmaban que la actividad humana, al aumentar el dióxido de carbono (CO_2) presente en la atmósfera, estaba provocando un acusado enfriamiento del clima. En cambio, a comienzos del siglo XXI nuestros temores han experimentado un giro de 180°: hay consenso en relación a que nos encontramos en medio de un periodo de calentamiento global, entre cuyas causas se cuenta principalmente la mano del hombre.

A día de hoy, la teoría del cambio climático consiste en la conjunción de tres hipótesis que no siempre suelen distinguirse, pese a que cada una de ellas posee un grado distinto de corroboración. Éstos son los tres pilares del consenso:

1. Existe un *calentamiento global* de la Tierra.
2. La causa principal del calentamiento global es el *efecto invernadero*.
3. La causa principal del efecto invernadero son las emisiones de CO_2 de *origen humano*.

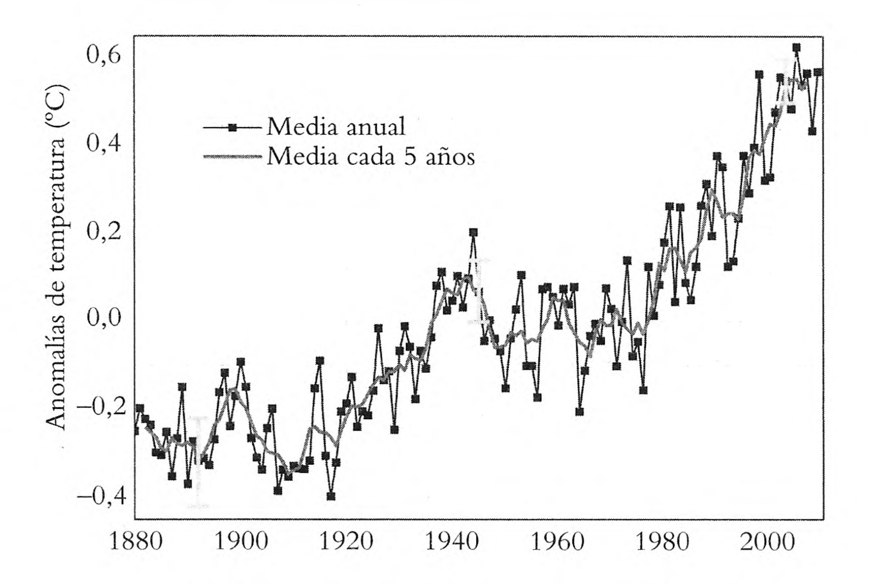
En otros términos: Cambio climático = calentamiento global + efecto invernadero + origen humano.

Pasado y presente del clima terrestre

El Panel Intergubernamental para el Cambio Climático (IPCC) de la ONU, en su cuarto informe de evaluación dado a conocer en 2007, cifra el calentamiento global en 0,74 °C, y establece que éste es más acusado en el hemisferio norte que en el sur.

Es interesante reparar en dos detalles de la gráfica siguiente, que recoge la evolución de la temperatura global hasta el presente. En primer lugar, se observa que el ritmo de calentamiento del planeta desde el final de la Pequeña Edad de Hielo, allá por 1880, no ha sido constante. Entre 1940 y 1975 el calentamiento se frenó por completo y dio paso a un ligero enfriamiento que hizo que cundiera el pánico por una posible nueva glaciación. Pero desde la década de 1980 el ritmo del calen-

tamiento se ha acentuado notablemente. Aun así, entre 1999 y 2009, la temperatura global ha dejado prácticamente de incrementarse, a pesar de lo cual, nueve de los diez años más calientes de los que se tiene constancia se han producido en este intervalo de tiempo.



Incremento de la temperatura global entre 1880 y 2010 según el Goddard Institute for Spaces Studies (GISS) de la NASA.

De hecho, lo que ha ocurrido a lo largo del siglo XX resulta bastante intrigante, como subraya el físico Manuel Toharia en su libro *El clima: el calentamiento global y el futuro del planeta*, porque:

> «En pleno desarrollo industrial, con un enorme incremento de las combustiones de carbón e hidrocarburos desde unos decenios antes, el calentamiento se detiene y se inicia un descenso térmico bastante generalizado a comienzos de los años 40. En los años 70, durante ese periodo de frío relativo, la teoría más aceptada era la del enfriamiento global, que parecía llevarnos a una nueva glaciación. La idea era que la contaminación atmosférica derivada de las industrias, los tubos de escape y las calderas de calefacción estaba haciendo que el aire fuera más opaco, dificultando la llegada de la radiación solar. Estaban en boga los modelos de invierno nuclear».

Y, sin embargo, a partir de 1980 la temperatura global ha vuelto a subir rápidamente. La verdad es que la temperatura media global está siempre cambiando como consecuencia de diversos factores; por ejemplo, la erupción del volcán Pinatubo en 1991 redujo la temperatura media en varias décimas, mientras que el intenso fenómeno de El Niño en 1998 provocó que aquel año fuera uno de los más cálidos del siglo.

EL INVIERNO NUCLEAR Y LA GUERRA FRÍA

El enfrentamiento silencioso entre la antigua Unión Soviética y Estados Unidos en plena era nuclear, la llamada «Guerra Fría», hizo surgir una teoría sobre un fenómeno climático extremo: como consecuencia del hipotético lanzamiento de bombas atómicas entre las potencias, podría producirse un drástico enfriamiento global debido al humo levantado. En teoría, este humo estratosférico ocultaría parcialmente el Sol, colapsaría la agricultura, provocaría hambrunas y, tal vez, acabaría desencadenando una glaciación. De hecho, el miedo a este invierno nuclear fue determinante en el inicio y la firma de los tratados de desarme nuclear entre las grandes potencias.

Aceptando que la variabilidad es una de las características esenciales de la temperatura global y, en general, del clima terrestre, los climatólogos intentan explicar el porqué del reciente periodo de calentamiento global volviendo su mirada al último milenio, ya que si comprendemos qué tiene de anormal el calentamiento de la Tierra en casi un grado centígrado durante el último siglo, tal vez podamos encontrar y atajar sus causas. Toda una lección de método científico.

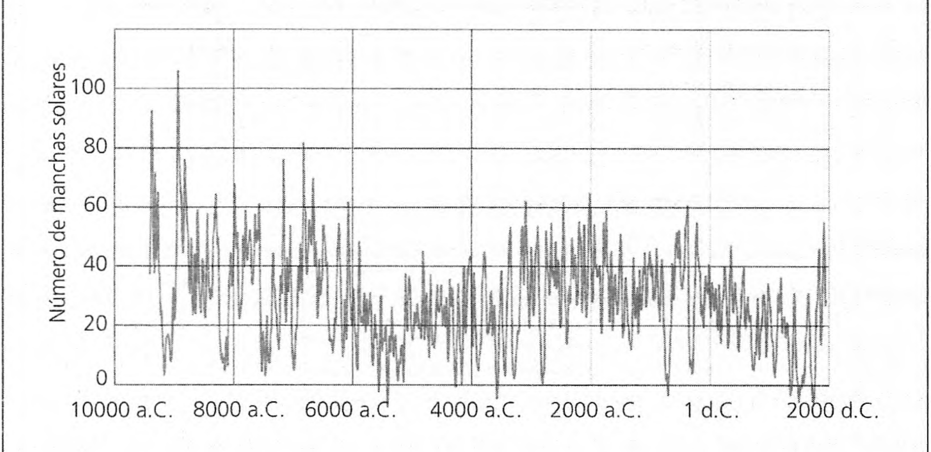
Por tanto, no hay que ser un miope temporal y limitarse al estudio del presente del clima terrestre, sino que también se debe analizar con precisión el pasado, es decir, hay que estudiar la historia del clima de la Tierra. En el último milenio, por ejemplo, al actual periodo de calentamiento le precedió una Pequeña Edad de Hielo, consecuencia de un mínimo de la actividad solar y de una elevada actividad volcánica, que duró del siglo XV hasta bien entrado el siglo XIX, y que puso fin al Periodo Cálido Medieval, u Óptimo Climático Medieval, una era extraordinariamente calurosa, que coincidió con un máximo solar (el Sol aparecía plagado de manchas solares).

Además, en algunos otros momentos de la historia geológica del planeta, la temperatura media de la Tierra ha debido de variar en una proporción parecida a la actual, según ponen en evidencia los estudios de diversas ramas de la paleoclimato-

logía. Ahora bien, aún no se conocen por completo las causas de los calentamientos ni de los enfriamientos de los climas en el pasado, ya que hay demasiados factores en juego: el Sol y sus ciclos, las erupciones volcánicas, las corrientes oceánicas, el efecto invernadero, etc. Y todo esto supone una medida de la ignorancia en nuestro conocimiento actual.

LAS MANCHAS SOLARES

Descubiertas en el siglo XVII por Galileo y por el jesuita Christopher Scheiner gracias al telescopio, las manchas solares son regiones del Sol con una temperatura más baja, pero con una intensa actividad magnética. La oscuridad de la mancha solar es fruto del contraste con su entorno. Sin embargo, aunque parezca paradójico, el Sol se encuentra más activo conforme aumenta el número de manchas solares, porque las áreas circundantes a las manchas son mucho más luminosas.

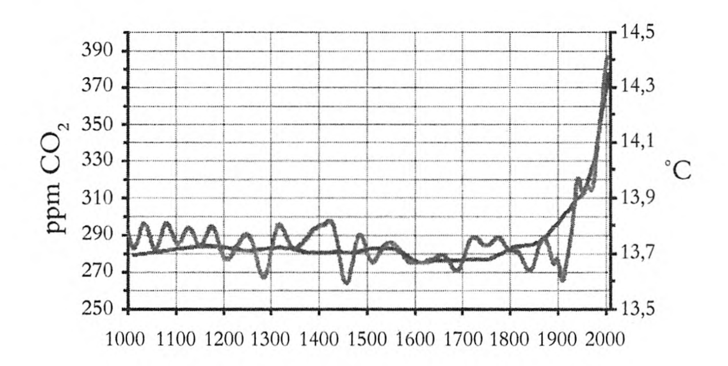


Reconstrucción del número de manchas solares durante los últimos 11.000 años.

Además, la brevedad de las series meteorológicas instrumentales (los registros de temperaturas en estaciones meteorológicas no se retrotraen más allá de 1850) obliga al empleo de *proxy-data* para el análisis de las tendencias climáticas. Los *proxy-data* son unos datos climáticos extraídos indirectamente de otras fuentes; por ejemplo, mediante la datación con isótopos de los estratos de sedimentos lacustres, el análisis del aire fósil atrapado en las burbujas de los testigos de hielo, o el estudio de los anillos de los árboles. El problema es que la reconstrucción de las temperaturas del

pasado a partir de *proxy-data* no tiene por qué ser correcta ni fiable, como puso de manifiesto la ya célebre controversia con el «palo de hockey» de Michael E. Mann, que llegó hasta el Congreso de Estados Unidos.

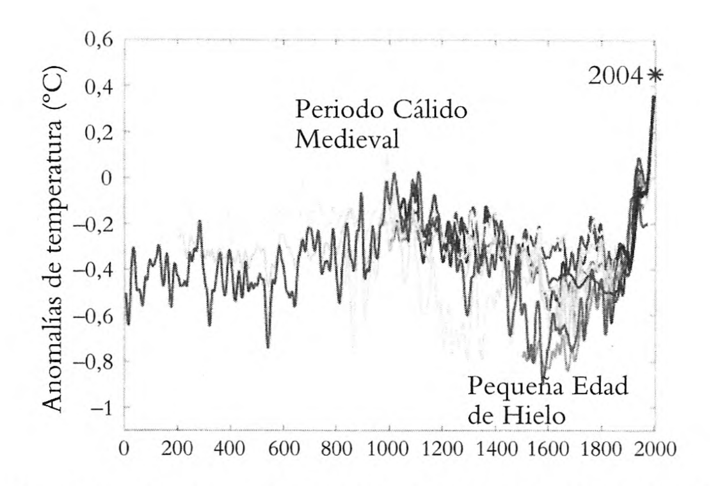
Aunque existen otros palos de hockey, el de Mann es el más prominente y el que tanto la ONU como el IPCC tomaron como paradigma en 2001 (el último informe, de 2007, ya lo ha rectificado). El climatólogo Michael E. Mann publicó en 1998 en la prestigiosa revista científica *Nature* un famoso gráfico con forma de palo de hockey que recogía supuestamente la evolución de la temperatura global en el último milenio a partir del estudio de los anillos anuales de cierta variedad de pinos. En él, tanto el Periodo Cálido Medieval como la Pequeña Edad de Hielo prácticamente habían desaparecido, y sólo destacaba el pico de temperatura del siglo XX. Parecía como si durante el último milenio no hubiese pasado nada relevante hasta el «calentón» del siglo XX.



Un gráfico en cuarentena: el «palo de hockey» de Mann.

Sin embargo, varios grupos de investigadores publicaron importantes estudios críticos. Por ejemplo, dos de ellos, el matemático Stephen McIntyre y el economista Ross McKitrick, revisaron el trabajo de Mann y detectaron múltiples errores, tanto en la toma de datos como en los cálculos matemáticos realizados con ellos. De hecho, incluso con idénticos datos, McIntyre y McKitrick obtuvieron resultados totalmente distintos. Y es que descubrieron que Mann y sus colaboradores habían empleado una sorprendente fórmula que, fueran cuales fueran los datos del *input*, el *output* siempre arrojaba una gráfica con forma de palo de hockey. Es decir, que el análisis estadístico de los datos llevado a cabo por Mann subestimaba múltiples fluctuaciones de la temperatura. En cambio, las versiones corregidas del cómputo

de Mann suavizan la diferencia entre la temperatura global actual y la del Óptimo Climático Medieval.

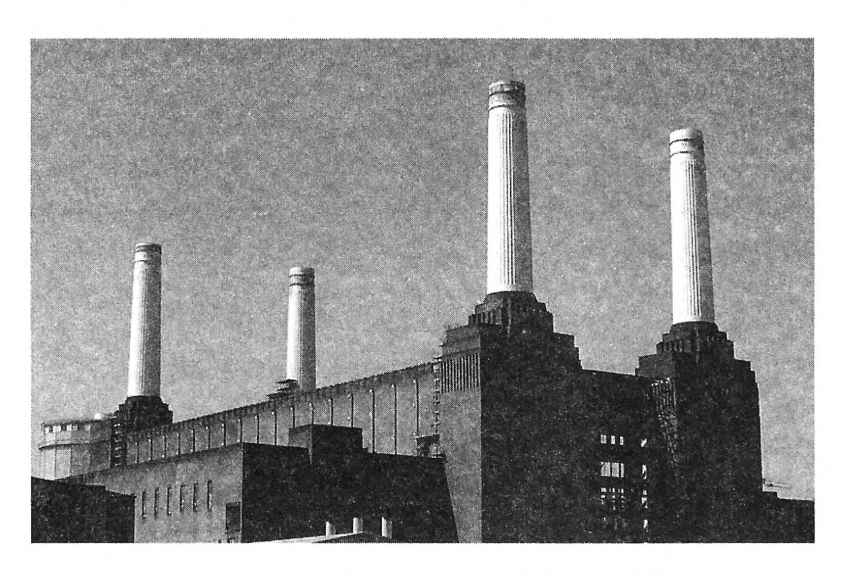


Diferentes reconstrucciones de la temperatura global en los dos últimos milenios (obsérvense los picos correspondientes al Periodo Cálido Medieval, la Pequeña Edad de Hielo y, en especial, el presente).

Y ¿qué sabemos con seguridad de la correlación entre temperatura y CO_2? En 1896, el científico sueco Svante August Arrhenius publicó un artículo titulado «De la influencia del ácido carbónico en el aire sobre la temperatura de la superficie», en el que apuntaba una relación directa entre la variación de temperatura y el nivel de CO_2, más tarde conocido como «efecto invernadero», aunque el primero en emplear la analogía del invernadero fue el matemático Jean-Baptiste Joseph Fourier, en 1824.

El anhídrido carbónico o dióxido de carbono (CO_2) es un gas llamado de efecto «invernadero» porque retiene parte de la energía que emite la superficie de la Tierra —como consecuencia de haber sido calentada por el Sol— y recrea, por lo tanto, lo que sucede en un invernadero común, cuyos cristales no dejan escapar la radiación solar que penetra. El resultado es que, tanto en un caso como en el otro, se produce un significativo calentamiento. Sin embargo, el CO_2 no es, ni mucho menos, el principal gas de efecto invernadero, sino que este puesto lo ocupa —atención— el vapor de agua, responsable del 60% de dicho efecto. Y es que hay que distinguir entre el efecto invernadero «natural», que hace habitable la Tierra al aumentar la temperatura del planeta en 33 °C, elevándola desde los −18 °C, que harían inviable la vida, y el

efecto invernadero «artificial», aquel que es inducido por el hombre como consecuencia de la emisión industrial de CO_2, metano, óxido nitroso y otros gases. Es un hecho demostrado que, desde la Revolución Industrial, el hombre ha contaminado la atmósfera, cambiando su composición química, sobre todo como consecuencia del consumo de combustibles fósiles (carbón, petróleo, etc.).



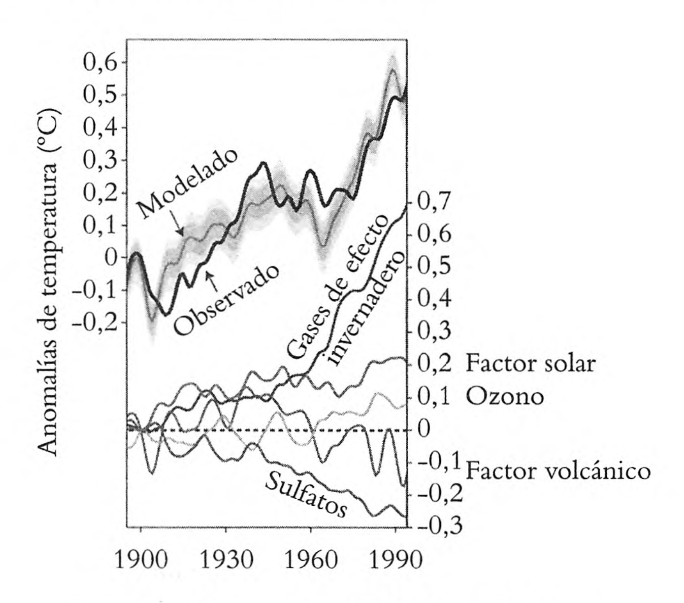
La central térmica de Battersea (Londres), mundialmente famosa por haber sido portada del disco Animals *de Pink Floyd.*

Pero la dinámica del clima es, desde luego, mucho más compleja que decir que el CO_2 aumenta y la temperatura sube. De hecho, la variabilidad natural y humana de los niveles de CO_2 difícilmente explica el aumento de las temperaturas entre 1920 y 1940, cuando estos niveles eran muy bajos, y mucho menos el enfriamiento producido entre 1940 y 1975, cuando se dio un crecimiento considerable de las emisiones de origen humano. Y, en efecto, los estudios paleoclimáticos muestran que la temperatura no sigue estrictamente los niveles de CO_2: en algunas reconstrucciones los picos de la temperatura aparecen unos 800 años antes que los picos de concentración de CO_2.

Así pues, aparte de los gases de efecto invernadero, detrás de la subida de las temperaturas subyacen otros factores, tanto naturales —por ejemplo, la actividad solar— como humanos —el calor generado por la urbanización de los continentes o por los cambios en el uso de la tierra, por poner sólo dos ejemplos de procesos humanos que han sido habitualmente subestimados pero que podrían estar detrás

de una fracción del calentamiento observado—. Análogamente, al igual que existen factores naturales que tienden a enfriar el planeta, como la actividad volcánica, hay también factores humanos proclives a ello. Uno de ellos es el llamado «oscurecimiento global», un fenómeno que hace referencia a la reducción gradual de la cantidad de luz solar que alcanza la superficie terrestre desde los años cincuenta. Se cree que dicho oscurecimiento ha sido provocado por un incremento de partículas como la carbonilla y los sulfatos en la atmósfera, debido a actividades humanas, principalmente la combustión y el transporte aéreo.

Al final, los modelos y los gráficos matemáticos que construyen los climatólogos están orientados a evaluar conjuntamente estos factores y su «forzamiento» o aportación, tanto positiva como negativa, a la evolución de la temperatura global. Cuando los modelos climáticos sólo tienen en cuenta los factores naturales, no reproducen el incremento observado de la temperatura media global. En cambio, cuando también se toman en consideración los factores humanos, sí se logra reproducir ese calentamiento de los últimos 35 años. Así, la comunidad científica se inclina a considerar que, mientras que las erupciones volcánicas y los sulfatos bajan la temperatura del planeta, los gases de efecto invernadero y la actividad solar contribuyen a aumentarla. Y la suma o el balance de todas estas causas explicaría los 0,74 °C de incremento de la temperatura global del planeta.



Variación de la temperatura global en función de diversos forzamientos positivos y negativos.

EL OSCURECIMIENTO GLOBAL Y EL 11S

Durante el parón casi completo del tráfico aéreo en los tres días que siguieron a los atentados del 11 de septiembre de 2001, dos científicos estadounidenses, David Travis y Gerry Stanhill, aprovecharon para medir las variaciones en la temperatura en algunas partes de Estados Unidos. Los resultados fueron increíbles: ambos observaron una variación de 1 °C en la temperatura diurna. Es decir, después de tres días sin aviones, la temperatura había descendido casi un grado.

A vueltas con la estadística y la teoría del caos

Sobre todos estos gráficos y sobre los modelos matemáticos que están en su base pesan, sin embargo, ciertas incertidumbres que los propios científicos intentan cuantificar. A la hora de evaluar la incertidumbre de estos modelos que tratan de reproducir el clima terrestre en el pasado, la estadística tiene mucho que decir, como se verá a continuación, pero, en cambio, para cuantificar la incertidumbre de los modelos que buscan predecir el clima del futuro, es la teoría del caos la que sale al paso, como se demostrará en el siguiente capítulo.

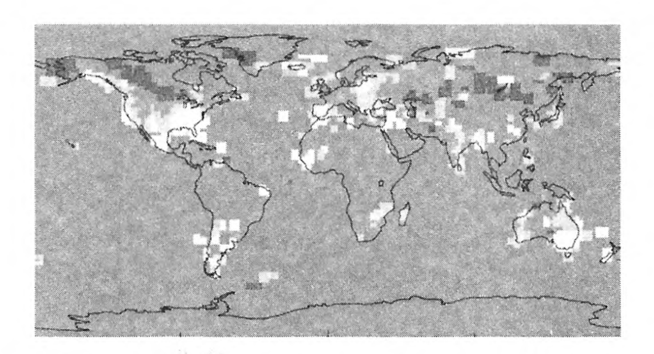
Hasta ahora hemos hablado continuamente de la temperatura global del planeta, de si sube, de si baja, de cómo varía... Pero, ¿qué es exactamente la «temperatura global»? ¿Alguna vez se lo han preguntado? Mientras que el tiempo meteorológico y la temperatura local en un cierto lugar se observan y se miden, el clima y la temperatura global del planeta no se miden, sino que son fruto de un cálculo previo, de una estimación. No existe algo parecido a un termómetro gigante que podamos ponerle a la Tierra para conocer su temperatura precisa. La famosa temperatura global es el resultado, por así decirlo, de una «cocina estadística»; es un promedio que puede calcularse de muy diferentes maneras a partir de los datos que arrojan las estaciones meteorológicas, los globos sonda y los satélites.

Así lo ilustran el matemático Christopher Essex y el economista Ross McKitrick: supongamos que un profesor de física está enseñando a sus alumnos cómo obtener promedios de la temperatura del aula de clase; en invierno, han tomado cuatro temperaturas de diversos lugares (cerca de la puerta, cerca de la ventana, en la mesa del profesor y en los pupitres del fondo) y las mediciones han sido: 17 °C, 19,9 °C, 20,3 °C y 22,6 °C respectivamente. Cuando llega la primavera, el profesor abre la ventana dejando que una cálida brisa inunde la clase. Entonces, los cuatro

termómetros marcan 20 °C y el profesor pregunta a los alumnos: ¿se ha calentado o enfriado la habitación con respecto al invierno? La mitad de los alumnos calcula la media de las temperaturas invernales usando la regla de la media aritmética, es decir, suma los cuatro registros y divide por cuatro. La otra mitad decide calcular una suerte de media cuadrática: suma los cuadrados de las temperaturas, divide por cuatro y hace la raíz cuadrada. ¿Qué conclusión extrae cada grupo?

El grupo que empleó el primer método, el método lineal, obtiene que la temperatura de la clase en invierno era de 19,95 °C. Es decir, que en primavera aumenta en 0,05 °C, hasta los 20 °C. Por el contrario, el grupo que empleó el segundo método, el método cuadrático, obtiene que la temperatura de la clase era, en invierno, de 20,05 °C. Por tanto, en comparación, la clase se ha enfriado en primavera en 0,05 °C. Y ¿quién tiene razón? Pues ambos grupos, porque los dos métodos de cálculo del promedio de la temperatura media invernal son válidos (sólo se diferencian en la forma en que se alcanza el equilibrio termodinámico).

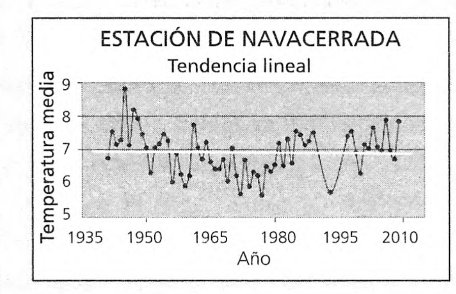
Además, cuando se pasa de la clase al planeta hay un problema de cantidad y calidad con los datos de partida, pues no existe una red de estaciones meteorológicas ni temporal ni espacialmente bien distribuida (el uso de globos sonda se generalizó a partir de 1950, y el de satélites climáticos, sólo a partir de 1980). Así, en todo el mundo sólo hay 1.000 estaciones cuyos registros abarquen todo el siglo XX y todas ellas están situadas en tierra y en el hemisferio norte (en ciudades europeas y norteamericanas), por lo que los océanos y el hemisferio sur quedan totalmente en segundo plano. Por lo tanto, dado que la red de observatorios con que se ha calculado la variación de la temperatura global a lo largo del siglo pasado es pobre y está mal repartida, la extrapolación queda sujeta a error.

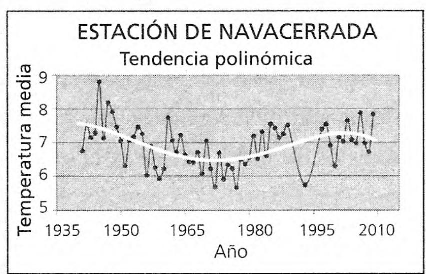


Red de observatorios cuyos registros abarcan entre 1880 y 2009. Obsérvese que la mayor parte del planeta no está barrida por celdilla alguna, dado que allí no hay observatorios (fuente: Simulación GISS).

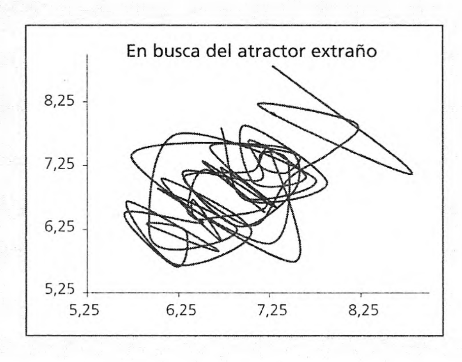
UNA ESTACIÓN A 1.888 METROS DE ALTITUD

Si fijamos nuestra atención en la Península Ibérica, observamos que para el cálculo de su temperatura global, tanto el IPCC de la ONU como el GISS de la NASA tienen en cuenta apenas una veintena de estaciones, de las que sólo cuatro están en el medio rural, lo suficientemente alejadas de las grandes ciudades, y de esas cuatro, la estación meteorológica de Navacerrada (Madrid) es la única que está situada en una cima montañosa y cuenta con un registro histórico lo suficientemente amplio. Ahora, si estudiamos la curva de temperaturas a la manera como lo hacen los climatólogos, con una regresión lineal, lo primero que observamos es que la tendencia general (lineal) de la temperatura en Navacerrada a lo largo del siglo xx ha sido permanecer constante, pero si, para aumentar el ajuste, realizamos una regresión polinómica —es decir, en lugar de encajar una recta, buscamos una curva suave que se ajuste bien a la serie de temperaturas—, obtenemos dos tendencias separadas en el tiempo, bajar y subir:





Y si, sirviéndonos del método que idearon los matemáticos del caos David Ruelle y Floris Takens —consistente en, dada una serie temporal a, b, c, d... pintar la trayectoria asociada a (a,b), (b,c), (c,d)...—, buscamos la dinámica (¿caótica?) y el atractor (¿extraño?) del clima en Navacerrada, entonces obtenemos una trayectoria cuya compleja trama podría interpretarse como una señal de caos:



Y no sólo eso, sino que, además, muchas de esas estaciones han quedado emplazadas dentro de las ciudades, bajo los efectos de la llamada «isla térmica» o «isla de calor», que modifica las lecturas (el asfalto, los coches, las farolas... sesgan significativamente la temperatura de las ciudades en comparación con la de su entorno), y cada centro de cálculo corrige esas anomalías o las «normaliza» a su manera.

En resumen, hoy sabemos muchas más cosas sobre el clima que ayer, y en la actualidad existe una preocupación generalizada por el cambio climático basada en hechos establecidos y en previsiones apoyadas en las tendencias observadas y la aplicación de modelos. Estos hechos y previsiones son razonables, aunque presentan algunas incertidumbres. Sabemos, desde luego, que los modelos indican que el calentamiento global observado no puede explicarse sólo por factores naturales, y es probable que los gases de efecto invernadero —debidos principalmente, pero no exclusivamente, al uso humano de combustibles fósiles— sean la causa más importante de ese calentamiento, junto con los cambios en el uso de la tierra, incluyendo la agricultura y la deforestación.

Pero todo esto no quita para que, al mismo tiempo, seamos conscientes de los errores que puede haber detrás: los modelos pueden ser excesivamente simples e imperfectos, las medidas tomadas de los datos pueden ser demasiado inexactas e imprecisas, etc. En concreto hay varias fuentes de incertidumbre en las previsiones climatológicas, como la escasez de datos sobre ciertas variables y zonas del mundo, o las limitaciones en la comprensión del funcionamiento de algunos mecanismos (el efecto de los aerosoles y las partículas de polvo). Además, los registros geológicos muestran que en siglos y milenios pasados ha habido importantes fluctuaciones climáticas que no pueden atribuirse a la influencia humana y que deben tenerse presentes al analizar el cambio actual.

Capítulo 5

Caos, tiempo y clima

La predicción es difícil, especialmente del futuro.
Niels Bohr

«Jack Hall es un climatólogo que advierte que el calentamiento global puede desatar un cambio abrupto en el clima de la Tierra. Y sus predicciones se confirman cuando el derretimiento de la capa de hielo polar incorpora grandes cantidades de agua dulce a los océanos. Esto provoca la interrupción de la corriente del Golfo en el Atlántico, lo que desestabiliza el clima en el hemisferio norte. Además, muy pronto una serie de sucesos inexplicables comienzan a ocurrir: la nieve cae sobre Nueva Delhi, enormes piedras de granizo golpean Tokio, un poderoso tornado destruye los edificios de Los Ángeles y Manhattan es sepultada por un tsunami gigantesco. El resultado es una megatormenta global que crea una nueva edad de hielo y sepulta el planeta bajo decenas de metros de nieve.»

Ésta es, a grandes rasgos, la trama de la película *El día de mañana*, rodada en 2004 y que fue todo un éxito en taquilla. Sin embargo, su argumento está más cerca de la ciencia ficción que de la ciencia real, a pesar de que el futuro que predice esta última tampoco es que sea muy halagüeño. Así como en el capítulo anterior echamos la vista atrás para observar el pasado del clima terrestre, ahora miraremos hacia delante. ¿Qué sabemos del clima futuro? ¿Podemos predecirlo? ¿Permiten los modelos matemáticos del clima predecir, por ejemplo, la temperatura media del planeta dentro de 100 años?

El futuro del clima: una predicción imposible

Los esfuerzos por modelar matemáticamente el tiempo y el clima comenzaron en la feliz década de 1920. En aquel tiempo, los meteorólogos sinópticos (aquellos que se apoyan en observaciones) se percataron de que, si querían ampliar el rango de sus predicciones del tiempo o, en general, del clima, precisaban indispensablemente de la ayuda de los meteorólogos dinamicistas (los que emplean con más asiduidad

ecuaciones). Pronto se concibió que la atmósfera, como el océano, era un sistema dinámico muy complejo, y que la idea pionera propuesta a principios del siglo XX por el físico y meteorólogo noruego Vilhelm Bjerknes (1862-1951) de resolver el problema de la predicción meteorológica y climática mediante la resolución de las ecuaciones que describiera la atmósfera no iba a ser tarea fácil.

El matemático inglés Lewis Fry Richardson (1881-1953) retomó más adelante el sueño de Bjerknes: aprovechando sus viajes por toda Francia como conductor de ambulancias durante la Primera Guerra Mundial, recopiló un amplio conjunto de datos meteorológicos sobre un día concreto, el 20 de mayo de 1910, y durante seis semanas realizó miles de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con el fin de realizar una predicción del tiempo a seis horas vista en una pequeña región. Pero obtuvo un resultado completamente insatisfactorio: su predicción no casaba con los datos que él mismo había recogido. Sin embargo, lejos de desanimarse por el fracaso, tuvo una visión premonitoria: «Harían falta 64.000 personas trabajando por turnos para prever el estado de la atmósfera con mayor rapidez que la de su evolución real». Transcurridas las décadas, su «máquina del tiempo» acabó haciéndose realidad, aunque de una forma inimaginable: en vez de 64.000 personas, hicieron falta 64.000 válvulas electrónicas.

El sistema global del tiempo meteorológico y del clima tenía que representarse con un sistema de ecuaciones con más de 5.000.000 de variables, mezclando tres clases de ingredientes: primero, los principios físicos fundamentales (conservación de la energía, de la masa, etc.); segundo, las ecuaciones matemáticas pertinentes (las intratables ecuaciones no lineales de Navier-Stokes acerca del movimiento de fluidos), y, por último, ciertas fórmulas inducidas empíricamente (como la fórmula de evaporación del agua en función de la humedad y de la velocidad del viento).

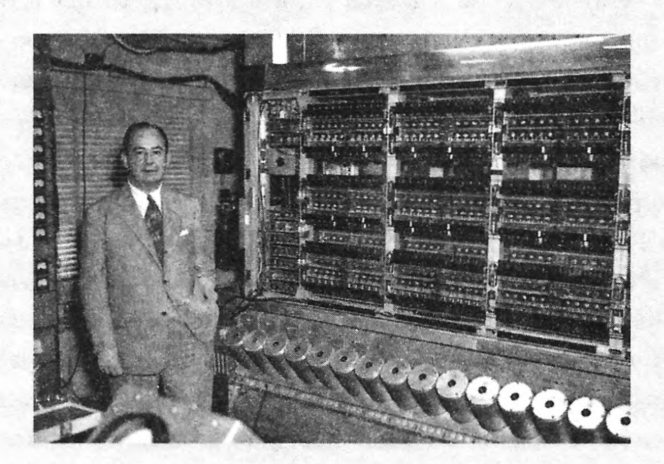
Pero la carencia de herramientas de cómputo eficaces retrasó su desarrollo hasta la puesta en marcha de los ordenadores, hacia mediados del siglo XX. Finalmente, el estudio de un sistema tan complejo como la atmósfera terminó siendo factible gracias a una fértil metodología: la modelización matemática, el análisis y la simulación mediante superordenadores que posibilitan acciones correctivas encaminadas a mejorar la situación, es decir, el «control».

La distinción entre meteorología y climatología se sustenta, como ya sabemos, en la distinta escala temporal a que hace referencia cada una de ellas. Mientras que la predicción meteorológica es de un par de días o, a lo sumo, de una o dos semanas, la predicción climática, en cambio, se establece dentro de un horizonte que puede abarcar hasta varios siglos. Además, mientras que la primera disciplina per-

LA PROFECÍA DE VON NEUMANN

John von Neumann (1903-1957) fue un matemático prodigioso que trabajó con acierto en casi todos los campos de las matemáticas: teoría de conjuntos, análisis funcional, mecánica cuántica, economía... Involucrado en el desarrollo de la computación, Von Neumann se fijó la meta de predecir el tiempo y el clima sirviéndose de ordenadores. En este sentido, en 1955 escribió: «La intervención en cuestiones atmosféricas y climáticas vendrá probablemente en unas pocas décadas, y lo hará en una escala de dificultad difícil de imaginar en el presente». Entre los miembros del grupo con los que trabajó en Princeton se encontraba Jule Gregory Charney (1917-1981), un meteorólogo y climatólogo muy influyente, que acabó liderando gran parte de la investigación puntera y que... fue el «jefe» de Edward Lorenz.

El 31 de enero de 1949 el potente ordenador ENIAC, con Von Neumann y sus colaboradores a la cabeza, fue capaz de pronosticar con 24 horas de antelación el desarrollo de una gran tormenta sobre el noroeste de Estados Unidos. Todo un hito en la historia de la meteorología.



John von Neumann junto al computador ENIAC.

sigue una gran exactitud en sus predicciones, la segunda es más cualitativa que cuantitativa, porque sólo busca conocer el clima, es decir, por definición, el estado promedio de la atmósfera que puede observarse como tiempo meteorológico a lo largo de años.

En los estudios meteorológicos la incógnita es la temperatura puntual e instantánea, es decir, la temperatura de un determinado lugar en cierto instante de tiempo. Por ejemplo, la temperatura que habrá en la Puerta de Brandeburgo (Berlín) maña-

na a las 12:00 horas. En cambio, en los estudios climáticos la incógnita es una temperatura media, por ejemplo, la temperatura media en la ciudad de Berlín en el año 2100. Este promedio, espacial y temporal, se calcula promediando (integrando) la temperatura de cada punto de la ciudad en cada día del año.

Otro tema es cómo se puede hacer esto en la práctica, porque generalmente sólo se conocen las temperaturas en una cantidad discreta de puntos y tiempos (las estaciones meteorológicas), a partir de las cuales se interpola y se calcula la temperatura media. Pero la interpolación y el promedio no tienen por qué ser unívocos, como se expuso en el capítulo anterior (piénsese en el experimento del profesor de física y los alumnos de clase).

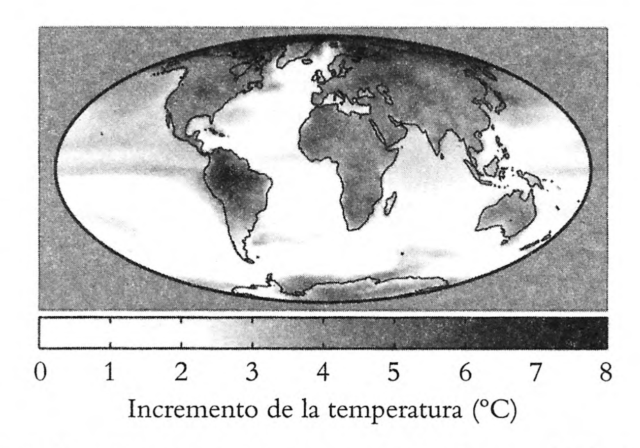
Así pues, las herramientas de que disponen los meteorólogos y los climatólogos para estudiar la evolución de ambos tipos de temperatura son los modelos basados en las ecuaciones del movimiento de un fluido compresible y estratificado (la atmósfera) sobre una esfera rugosa en rotación (la Tierra). Y el modelo depende, claro está, de las «condiciones iniciales» y de las «condiciones de contorno». Las condiciones iniciales —por ejemplo, las temperaturas a día de hoy— son de más trascendencia en la predicción meteorológica, mientras que las de contorno —por ejemplo, los distintos comportamientos del aire según esté en contacto con el océano o con la tierra— lo son más en la predicción climática.

Una clase de modelos climáticos con gran valor de diagnóstico son la clase de «modelos de balance de radiación de energía», cuyo abuelo fue el sueco Svante Arrhenius a finales del siglo XIX y cuyos padres son M.I. Budyko y W.D. Sellers, ya en 1969. La base elemental de estos modelos es una ecuación diferencial que iguala la derivada o tasa de variación de la temperatura media con respecto al tiempo con la suma y la resta de diversos factores (por ejemplo, a la radiación solar absorbida por la Tierra se la resta la radiación que emite la Tierra en calidad de cuerpo caliente). Según como se ponderen estos factores en función de la temperatura media, el modelo de balance de energías quedará cerrado de una u otra manera.

Este tipo de modelos pueden complicarse y llegar a alcanzar el grado de sofisticación que caracteriza a los actuales «modelos de circulación general», los cuales cubren toda la superficie terrestre; pero, como es lógico, dada su extrema complejidad, no tienen solución analítica conocida, y sólo pueden abordarse numéricamente. Como es natural, la resolución numérica tampoco es fácil, porque precisa de una increíble labor de cálculo asistido por ordenador, y además tiene el inconveniente de que, al necesitar unos tiempos de cómputo razonables, exige la consideración de una malla espacial no excesivamente fina (una extensión como la Península Ibérica,

por ejemplo, queda cubierta por poco más de una docena de puntos), con la incómoda artificialidad que esto conlleva.

En la comunidad científica internacional existen múltiples grupos que han desarrollado modelos de circulación general, puesto que éstos son los que emplean las principales agencias de predicción del clima (como el IPCC de la ONU o el GISS de la NASA). Cada uno de ellos perfecciona los métodos de modelado de los procesos físicos y las técnicas de resolución numérica de las ecuaciones conforme avanzan el conocimiento observacional y la capacidad simuladora de los ordenadores.



Predicción del incremento de las temperaturas medias entre 2070 y 2100 según el modelo de circulación general HadCM3 del IPCC.

Certezas e incertidumbres en los modelos matemáticos

Pero vayamos más despacio y regresemos a la década de los sesenta, cuando un joven meteorólogo colega de Jule Gregory Charney, Edward Lorenz, a quien ya conocemos, planteó el «curioso» modelo formado por tres ecuaciones diferenciales ordinarias para describir el movimiento de la atmósfera conocido hoy como «sistema de Lorenz». Como se vio en el capítulo 2, Lorenz halló un comportamiento caótico en las soluciones, lo que hacía que su sistema fuera, en la práctica, impredecible. Si había cualquier error en la observación del estado presente —y en un sistema real eso parece inevitable—, era imposible obtener una predicción aceptable del estado en el futuro lejano. Se trataba del efecto mariposa. Expresado con sus propias palabras:

> «Cuando mis resultados se aplican a la atmósfera, que es ostensiblemente no periódica, indican que la predicción de un futuro lo suficientemente distante es imposible por cualquier método, a menos que las condiciones iniciales se conozcan exactamente. En vista de la inevitable imprecisión e incompletitud de las observaciones meteorológicas, la predicción a largo plazo parece ser imposible».

Retrocedamos aún más en el tiempo, hasta 1908. En aquel momento Henri Poincaré ya había profundizado en la investigación de las raíces de esa clase de fenómenos tan inestables en que resulta imposible predecir a largo plazo la dinámica del sistema. Para sus observaciones, el francés tomó como base su investigación del problema de los tres cuerpos, pero también, atención, del tiempo meteorológico. De este último Poincaré afirmaba que era inestable, que los meteorólogos lo sabían y que, a causa de ello, no podían decir dónde ni cuándo iba a haber un ciclón:

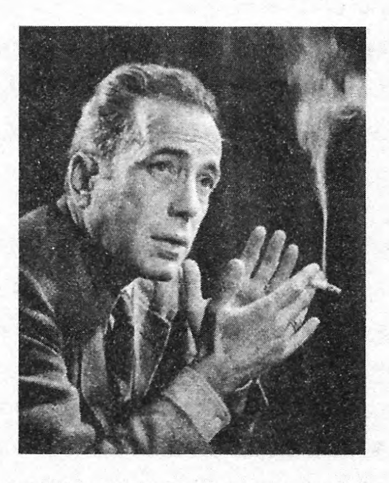
> «¿Por qué tienen tantas dificultades los meteorólogos para predecir el tiempo? ¿Por qué las lluvias y las tormentas parecen producirse aleatoriamente, de forma que mucha gente que encontraría ridículo rezar para que se produzca un eclipse considera muy natural rezar para que llueva o salga el sol? Los meteorólogos son conscientes de que surgirá un ciclón en algún punto, pero no pueden predecir dónde. Una décima de grado de más en un punto que en otro y el ciclón se desencadena aquí y no allí, y extiende su furia sobre países que de lo contrario no la hubieran sufrido».

Como apunta David Ruelle: «Las matemáticas de Poincaré han tenido su papel, pero sus ideas sobre predicciones meteorológicas tuvieron que ser descubiertas de forma independiente». En un artículo de 1963, Lorenz se hacía eco de los trabajos sobre sistemas dinámicos de Poincaré, pero desconocía aún sus ideas sobre el caos, el tiempo y el clima.

Dado que incluso el modelo tan sencillo de Lorenz es caótico, y más aún, dado que descubrimos que los regímenes caóticos están bastante extendidos entre los sistemas no lineales, es razonable conjeturar que todo modelo preciso del comportamiento a gran escala de la atmósfera exhibirá también algún tipo de sensibilidad a las condiciones iniciales capaz de hacer que perturbaciones del tamaño de las producidas por las alas de una mariposa determinen el desarrollo de tornados. Y vice-

CIELOS TURBULENTOS

Entre los fenómenos caóticos que han focalizado la atención por su conexión con la dinámica climática destaca la transición a la turbulencia en los fluidos, estudiada, como ya se ha mencionado, por David Ruelle y Floris Takens, quienes propusieron los atractores extraños como la explicación matemática de la turbulencia, una mezcla de caos espacial y temporal que ya preocupó al filósofo epicúreo Lucrecio hace más de 2.000 años. La transición del fluido del comportamiento laminar —constante, estable y regular— al impredecible comportamiento turbulento —inconstante, inestable e irregular— le resulta familiar a cualquiera que haya viajado en avión y haya pasado súbitamente del aire en calma a una tormenta.



El humo del cigarrillo de Humphrey Bogart se propaga, primero, laminarmente y, acto seguido, de modo turbulento y caótico.

versa, claro está. Como tan variación en la condición inicial es que la mariposa bata las alas como que no las bata, si lo primero puede determinar el desarrollo de un tornado sobre Texas, lo segundo también puede evitarlo. O bien provocar que éste se dé sobre Singapur o, acaso, sobre Nueva York. O mejor aún, que no se dé en ningún lugar. El movimiento o el reposo de unas simples alas de mariposa hoy producen un diminuto cambio en la atmósfera, de modo que después de un cierto periodo de tiempo el comportamiento de la atmósfera diverge notablemente del que debería haber tenido. Se trata, en una palabra, del caos.

Las consecuencias del caos para las predicciones meteorológicas son bien conocidas por todos: resulta imposible predecir el tiempo meteorológico más allá de diez

días. Por esta razón los meteorólogos de la televisión suelen errar cuando intentan predecir el tiempo que hará en vacaciones con más de una semana de antelación: los microerrores a la hora de fijar las condiciones iniciales de la atmósfera se inflan hasta convertirse en macroerrores de nuestras predicciones.

UN FRAGMENTO DE LA NOVELA *PARQUE JURÁSICO* DE MICHAEL CRICHTON

—En su origen, la teoría del caos surgió de los intentos por hacer modelos meteorológicos computarizados, en la década de los años sesenta. El clima es un sistema grande y complejo; específicamente la atmósfera de la Tierra cuando interactúa con las masas continentales y el mar, y con el Sol. El comportamiento de este sistema grande y complicado desafía el entendimiento. Si uso un cañón para disparar un proyectil de cierto peso, a cierta velocidad y con un cierto ángulo de inclinación, y luego disparo un segundo proyectil con peso, velocidad y ángulo casi iguales, ¿qué ocurre?

—Los dos proyectiles caerán casi en el mismo punto.

—Así es. Eso es dinámica lineal.

—Entendido.

—Pero si tengo un sistema meteorológico en el que empiezo con una cierta temperatura, y una cierta velocidad del viento y una cierta humedad, y después lo repito casi con las mismas temperaturas, viento y humedad, el segundo sistema no se comportará casi igual: se desviará y rápidamente se volverá muy diferente del primero; tormentas de truenos en vez de sol. Eso es dinámica no lineal.

Pero, ¿qué consecuencias se deducen para las predicciones climáticas? En su libro *La esencia del caos*, Lorenz cuenta que:

> «Casi todos los modelos globales se han utilizado para experimentos de predictibilidad, en los que dos o más soluciones originadas a partir de estados iniciales ligeramente diferentes se examinan para detectar la presencia de dependencia sensible... Casi sin excepción, los modelos han indicado que las pequeñas diferencias iniciales terminarán por ampliarse hasta dejar de ser pequeñas».

De hecho, en su informe de 2001, el IPCC de la ONU apunta lo siguiente:

«En la investigación y la creación de modelos climáticos, debemos reconocer que nos enfrentamos con un sistema caótico no lineal y, por tanto, las predicciones a largo plazo de los estados climáticos futuros no son posibles».

Y en su informe de 2007 añade:

«Desde el trabajo de Lorenz (1963) se sabe que incluso los modelos simples pueden mostrar una dinámica compleja como consecuencia de la no linealidad. La dinámica no lineal inherente al sistema climático aparece en las simulaciones del clima a cualquier escala temporal. Los modelos de la interacción atmósfera-océano, clima-biosfera o clima-economía pueden mostrar una dinámica similar, caracterizada por su impredictibilidad parcial, bifurcaciones y transición al caos».

Es fundamental para poder comprender las afirmaciones que, un día sí y otro también, se hacen acerca del cambio climático, darse cuenta de que ni el tiempo ni el clima pueden ser modelados de modo que permitan predecir con total exactitud los que habrá la semana que viene o dentro de 100 años, respectivamente. Los resultados que producen los modelos computarizados son, básicamente, escenarios o simulaciones con un importante componente probabilístico que debe evaluarse en cada caso. De hecho, prudentemente, el IPCC prefiere emplear el término «proyección» al de «predicción» para referirse a los resultados de los escenarios o simulaciones. Cada escenario o simulación de, pongamos por caso, la temperatura media del planeta en 2100 depende de una serie de supuestos (cuantía de las emisiones de gases de efecto invernadero, variación solar, etc.). Y el problema radica, en gran parte, en determinar cuáles de esos supuestos son los que corresponden a nuestro mundo real. Aún no conocemos con precisión qué aspectos del clima son predecibles a largo plazo con seguridad, porque perturbaciones inobservables pueden conducir a futuros dramáticamente diferentes.

No obstante, cuesta mucho hacerse a la idea de la inherente impredictibilidad del tiempo y del clima a largo plazo como consecuencia del caos. En la década de 1970 muchos investigadores esperaban que, añadiendo variables y más variables, se estabilizaría el sistema y, por tanto, se lograría una predictibilidad a largo plazo del comportamiento de la atmósfera. Así, Jule Gregory Charney, por ejemplo, todavía era optimista y declaraba: «No hay razón por la cual los métodos numéricos no puedan ser capaces de predecir el ciclo de vida del sistema atmosférico, sólo los

modelos actuales tienen defectos fatales». Pero, sin embargo, uno de esos defectos fatales era, y es, irremediable: el caos.

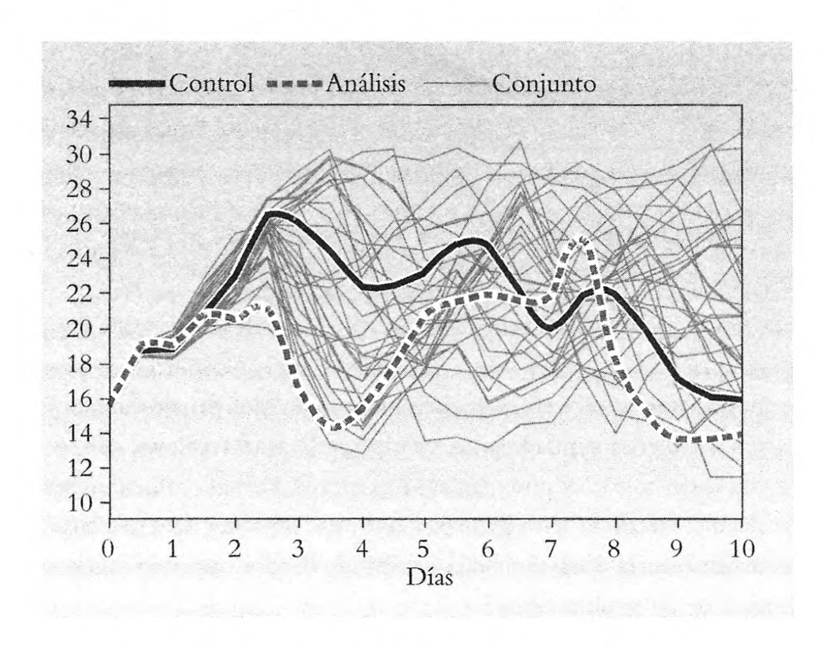
Para algunos científicos, como refleja Tim Palmer (uno de los climatólogos punteros del IPCC) en un artículo titulado «El calentamiento global en un clima no lineal, ¿podemos estar seguros?», el caos no se daría tanto en la predicción climática como en la meteorológica. Siguiendo una distinción acuñada por el propio Lorenz, la predicción meteorológica formaría parte de un «problema de valor inicial» (predicciones de primer tipo), en el que el efecto mariposa influye mucho porque se manejan trayectorias. Por eso, si queremos seguirle la pista al tiempo meteorológico para poder predecirlo, tenemos que seguir de cerca la trayectoria-solución de las ecuaciones cuyas condiciones iniciales son las condiciones meteorológicas (temperatura, presión, humedad...) del día de hoy. En cambio, la predicción climática sería, a diferencia de la anterior, parte de un «problema de contorno» (predicciones de segundo tipo), en que el efecto mariposa ya no influye tanto porque no se manejan trayectorias sino atractores. Lo que interesa en el estudio del clima es el comportamiento a largo plazo, que viene dado por el atractor. Con otras palabras, si queremos conocer el clima, no tenemos que seguir esta o aquella trayectoria en concreto, sino observar qué hacen ambas a largo plazo, según se acerquen al atractor; porque el atractor ofrece el régimen promedio del tiempo, esto es, el clima. Y si, además, estamos interesados en comprender cómo los distintos factores o forzamientos (concentración atmosférica de CO_2, radiación solar...) influyen en el clima, tendremos que estudiar cómo modifican estos parámetros la forma del atractor.

En suma, si se identifica el clima con el atractor del sistema atmosférico, la «mariposa» queda aplastada, pero, como el sistema climático es no lineal y de presumible régimen caótico, el atractor será extraño y poseerá probablemente una cuenca de atracción de altísima complejidad de detalles de grano fino y grueso, con lo que no se avanza demasiado en el dominio de la inestabilidad. Por ejemplo, si el clima fuese identificable al atractor del sistema de Lorenz y el giro con respecto al ala derecha significara que llueve, mientras que el giro con respecto al ala izquierda significara que no llueve, sabríamos la pauta general del clima: unos días llueve y otros no, pero poco más, ya que las trayectorias meteorológicas dan vueltas a cada ala del atractor de modo aleatorio, impredecible.

A día de hoy, más de cuarenta años después del descubrimiento de Lorenz, las técnicas de predicción a corto y medio plazo han mejorado notablemente porque a los avances teóricos (nuevos conocimientos) se están uniendo avances prácticos

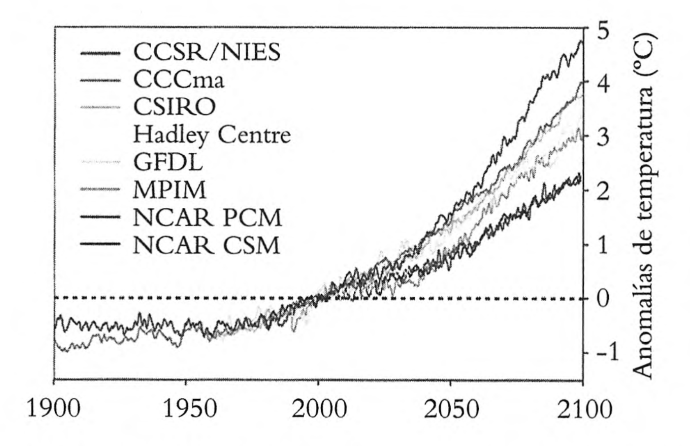
(mejores superordenadores), capaces de minimizar la gran complejidad y «caoticidad» del tiempo y del clima. Uno de estos progresos es la llamada «predicción por conjuntos» (*ensemble prediction*), que consiste en usar conjuntos de condiciones iniciales distintas y/o distintos modelos matemáticos a la vez. De esta forma se pretende minimizar los errores en la determinación de la condición inicial y los errores intrínsecos del modelo.

Para la predicción de corto alcance (meteorológica), donde domina el error debido a la indeterminación de la condición inicial, se usa desde hace años, con éxito probado, la técnica de la predicción por conjuntos con un solo modelo y un conjunto de condiciones iniciales. Es decir, se estudia la evolución del modelo para condiciones iniciales parecidas y luego se elabora una predicción comparando los distintos resultados. Suele observarse que las distintas salidas (del orden de cincuenta) que produce el modelo son bastante parecidas en los primeros días de pronóstico, pero que a partir del tercer y cuarto día comienzan a aparecer discrepancias en la evolución que van haciéndose cada vez mayores.



Predicción por conjuntos de la temperatura en Londres realizada el 26/6/1994 por el European Centre for Medium-Range Weather Forecast (Centro europeo para la predicción del tiempo a medio plazo) (ECMWF). A partir del cuarto día (eje horizontal) la dispersión cubre una franja de hasta 16 °C (entre 14 y 30 °C, eje vertical).

Para predicciones de largo alcance (climáticas), donde el que domina es el error propio del modelo, se está usando el método de la predicción por conjuntos con distintos modelos. Es decir, se estudia la evolución a partir de una misma condición inicial en varios modelos y, posteriormente, se elabora una predicción ponderando las distintas proyecciones. Por ejemplo, el IPCC predice, basándose en distintos modelos, que la temperatura media global en 2100 se incrementará entre 2,2 y 4,7 °C respecto de su valor en el año 2000. Los resultados de los diferentes modelos computerizados no son idénticos y la disparidad refleja el grado de incertidumbre en nuestro conocimiento del clima terrestre.



Los modelos globales predicen que la temperatura media del planeta en 2100 aumentará entre 2,2 y 4,7 °C; hay, por tanto, un abanico de incertidumbre de casi 3 °C.

Existe un enorme interés en el desarrollo de la técnica de predicción por conjuntos, ya que se prevé que sea de gran utilidad en la predicción del cambio climático. De todas formas, una cosa es segura: hay que abandonar radicalmente la idea de que podamos descubrir un algoritmo que nos capacite para predecir a largo plazo, universalmente, la dinámica de la atmósfera. El caos impone límites severos a nuestro horizonte de predictibilidad.

Cuando la matemática se convierte en economía

En resumen, es mérito de Lorenz haber probado el comportamiento caótico, inestable e impredecible, del tiempo meteorológico y, por extensión, del clima. La at-

mósfera es un sistema no lineal... y claramente caótico. En cuanto a este último dato, el caos no debe entenderse como algo errático o desordenado, sino como un tipo de orden sin periodicidad. El clima es un sistema caótico en el sentido de que puede experimentar cambios impredecibles incluso en ausencia de forzamientos. Así, una de las principales metas de la investigación puntera es, como se ha dicho, encontrar modelos matemáticos correctos para este clima caótico con el fin de predecir lo imposible: nuestro futuro.

Los modelos climáticos son, como se ha visto, modelos matemáticos que intentan simular el clima del pasado y predecir el del futuro. Existe una compleja jerarquía de modelos climáticos, desde los más simples, representados por unas pocas ecuaciones que recogen la dinámica de la temperatura media global, hasta los más complejos, que precisan del uso de supercomputadoras y tratan de modelizar el desarrollo de múltiples variables climáticas (la temperatura media global, el viento, la humedad, las corrientes oceánicas...). No obstante, hasta los más complejos son simplificaciones, pues aún no se ha conseguido encontrar modelos capaces de reproducir el pasado y de predecir con detalle el clima a escala local, no solamente global. Las insuficiencias en la capacidad de computación y de predicción dificultan la elaboración de modelos a escala detallada, necesarios para el análisis en el ámbito nacional y regional del impacto del cambio climático.

Encarados con este problema no lineal, los científicos están obligados a elegir entre: o bien un modelo preciso para predecir (algo imposible), o bien una extrema simplificación para comprender y explicar. Como asevera uno de los grandes físicos del siglo XX, Freeman Dyson: «Los modelos climáticos son, esencialmente, herramientas para comprender el clima, que todavía no son adecuadas para predecirlo; no hay que creerse los números sólo porque salen de una supercomputadora». La sombra de la impredictibilidad de nuestro caótico clima aconseja prudencia.

El problema con el cambio climático es que, aun cuando existen múltiples incertidumbres, las consecuencias pueden ser fatales. Aunque no tengamos una certeza total del cambio climático del futuro, el riesgo derivado de no hacer nada es enorme, puesto que se trata de un problema que nos afecta a todos, en concreto a la economía y a sus recursos.

Recorramos ahora el camino que lleva de Montreal a Kioto. La conferencia sobre medio ambiente de Naciones Unidas celebrada en 1972 en Estocolmo canonizó el «principio de precaución» como guía de las políticas medioambientales. Es decir, que los bienes públicos medioambientales tenían que ser regulados internacionalmente para evitar los fallos del mercado. Y el primer paso que se dio en esta

dirección fue la negociación y la entrada en vigor, en la década de 1980, del tratado internacional conocido como Protocolo de Montreal para eliminar los CFC (o clorofluorocarbonos) y proteger la capa de ozono.

Con la creación en 1988 del IPCC (cuyos informes se han ido sucediendo en 1990, 1995, 2001 y 2007), la lucha contra el cambio climático desde la ONU también echó a andar. Más adelante, la cumbre de Río de 1992 constituyó un hito (no en vano se la conoce como la Cumbre de la Tierra), porque en ella se aprobó la Convención Marco de las Naciones Unidas sobre el cambio climático que había elaborado ese grupo de expertos. Cinco años después, en 1997, se acordó el llamado Protocolo de Kioto, cuyo fin era reducir en un 5,2% las emisiones globales de los gases más importantes de efecto invernadero durante el periodo 2008-2012 en relación a las emisiones del año base, 1990. Este tratado requiere una reducción modesta de las emisiones en algo más de 1.000 millones de toneladas de CO_2 (aunque los seres humanos, sólo por respirar, emitimos unos 2.500 millones anuales). En 2004, con la firma de este protocolo por parte de la Federación Rusa, Kioto entró en vigor, puesto que ya lo habían ratificado más de 55 de los 167 países miembros de la Convención Marco.

El quid de la cuestión es, como ya se ha señalado en varias ocasiones, que el problema del cambio climático presenta varias caras, y a las incertidumbres científicas hay que sumar también las incertidumbres relativas a los costes y beneficios del protocolo de Kioto. Mientras que el de Montreal sobre el uso de CFC generó un rápido consenso, porque sus costes a fin de cuentas no eran excesivos, los del protocolo de Kioto sí lo son para algunos países. Y es que, en líneas generales, está trazado bajo la idea de que «quien contamina, paga».

El verdadero problema estriba en que, pese a que los daños ocasionados por el cambio climático son mayores que los costes del protocolo (así lo mantiene el controvertido Informe Stern de 2007, encargado por el Reino Unido, que cifra los daños de no hacer nada entre el 5% y el 20% del PIB mundial), su implementación tan solo reduciría en 0,18 °C el calentamiento global esperado en 2100, es decir, que en esa fecha en vez de aumentar 3 °C habrá aumentado 2,82 °C, algo muy poco significativo. De hecho, el calentamiento sólo se retrasaría unos seis años, y en 2106 ya se alcanzaría esa temperatura. Así, si se comparan los costes del protocolo (hasta un 4% del PIB mundial) con los beneficios de su implementación (una diferencia de 0,18 °C entre ponerlo y no ponerlo en práctica), el resultado no es concluyente.

Es más, si se toma en consideración que la lucha contra el cambio climático no es sólo monetaria, sino que también existen costes personales, en vidas humanas, el

balance tampoco es concluyente: la cifra de fallecimientos atribuibles al cambio climático es relativamente poco importante en comparación con los producidos por las enfermedades que aún asolan el Tercer Mundo. Por ejemplo, las muertes achacables al cambio climático no llegan siquiera al 5% de las causadas por el sida, lo que puede decantar la dedicación de los recursos disponibles a tareas más urgentes. Según ese «ecologista escéptico» llamado Bjørn Lomborg, con la mitad del gasto total que supondrá Kioto (unos 8 billones de dólares) podría paliarse el hambre en el mundo. Porque, quizás, el hambre, junto con el control de la natalidad, sean los verdaderos problemas del Tercer Mundo, y no (todavía) el cambio climático o el respeto al medio ambiente. No en vano, muchos economistas señalan que África no necesita agricultura «ecológica» sino agricultura a secas. Lo interesante sería —argumentan— favorecer la transferencia de tecnologías no contaminantes a los países del Segundo y del Tercer Mundo, al tiempo que se promueve el ahorro energético, así como la energía nuclear inteligente y las energías renovables (hidráulica, eólica, solar) en el Primer Mundo.

EL ESTADO DE LA CUESTIÓN

En su último informe quinquenal, aparecido en mayo de 2007, el IPCC afirma: «Es "verosímil" que haya habido un calentamiento antropogénico significativo durante los últimos 50 años sobre cada continente, a excepción de la Antártida», y aclara que emplea el término «verosímil» en el sentido de un 67% de probabilidad, es decir, que la afirmación en que se incluye tiene un 33% de posibilidades de ser falsa, un margen de error que no debe despreciarse. Además, el IPCC predice para finales del presente siglo un calentamiento en el entorno de 3 °C, y asegura que es muy improbable que sea menor de 1,5 °C. Es de esperar que ese calentamiento persista durante décadas o siglos.

Y la economía, en política

Pero, como decíamos, la cara económica está intrincada con otras, especialmente con la cara política. Pasemos, pues, del análisis económico al análisis político de Kioto. ¿Qué nos descubre esta nueva mirada? Muchas cosas. Y algunas de ellas bastante sorprendentes...

Podemos preguntarnos, en primer lugar, por qué la mayoría de estados (con la excepción de la Unión Europea, de la que hablaremos más adelante) no quiere

colaborar en la lucha contra el cambio climático. La respuesta está, otra vez, en las matemáticas. Pero esta vez no en la teoría del caos, sino en la teoría de juegos, concretamente en el llamado «dilema del prisionero».

La teoría de juegos es una teoría matemática que intenta explicar cómo tomar decisiones en un ambiente hostil, de conflicto, es decir, cuando existen varios «decisores» (personas que deben tomar una decisión) con intereses contrapuestos. Esta teoría es de gran utilidad en la toma de decisiones empresariales, pero también en la toma de decisiones políticas e incluso militares. No en vano ha sido aplicada con éxito al estudio de las distintas estrategias en la carrera armamentista nuclear, en los llamados «juegos de guerra». La nómina de sus creadores incluye los nombres de genios como John von Neumann y John F. Nash (cuya personalidad esquizofrénica fue el argumento de la premiada película *Una mente maravillosa*).

Formalizado por Albert W. Tucker, el dilema del prisionero es un modelo de conflicto que se presenta con mucha frecuencia: dos delincuentes son detenidos y encerrados en celdas de aislamiento, de modo que no pueden comunicarse entre ellos. La policía sospecha que han participado en el robo de un banco, delito cuya pena asciende a diez años de prisión, pero apenas tiene pruebas, con lo que sólo puede acusarles de un delito menor por tenencia ilícita de armas, cuyo castigo es de dos años de cárcel. No obstante, si uno de los ladrones traiciona a su compañero y colabora con la policía aportando pruebas que incriminen a su cómplice, su condena se reducirá a la mitad (un año de cárcel), mientras que el otro cumplirá íntegramente la pena por haber robado el banco (diez años de cárcel). Finalmente, si ambos confiesan y se incriminan mutuamente, el juez sólo podrá condenarlos a cinco años respectivamente.

Las estrategias o alternativas que se abren a cada prisionero son dos: «lealtad» o «traición». Al no conocer la decisión del otro preso, la estrategia más segura es siempre traicionar. Porque si uno de los presos permanece leal pero su compañero lo delata, se arriesga a cumplir diez años de cárcel, mientras que si lo traiciona, sólo cumplirá cinco años en el peor de los casos (cuando su compañero también lo delate). Sin embargo, esta solución del juego es paradójica, en el sentido de que para ambos el resultado de traicionar (cinco años) es mucho peor que el de elegir ser leales (un año).

El cambio climático, al igual que otros grandes problemas medioambientales, se ajusta al planteamiento del dilema del prisionero, puesto que genera una solución ineficiente y un fracaso en los acuerdos. Veámoslo con un ejemplo: tomamos dos países A y B cualesquiera, cuyas estrategias con respecto al protocolo de Kioto son, fundamentalmente, dos: reducir las emisiones o no reducirlas. Si A reduce sus emisiones pero B no lo hace, A tendrá más costes que beneficios (porque hará todo el

esfuerzo) y, sin embargo, *B* se aprovechará y disfrutará de la reducción en los niveles de CO_2 sin incurrir en ningún coste (porque el aire es un bien común). Recíprocamente, si *B* reduce las emisiones pero *A* no lo hace, *B* saldrá perdiendo económicamente con respecto a *A*. Puestas así las cosas, la mejor estrategia tanto para *A* como para *B* es no cooperar, es decir, no cumplir el protocolo de Kioto, a pesar de que si ambos países cooperasen reduciendo las emisiones se obtendría el mayor beneficio. El comportamiento de cada uno de los países es racional, aunque el resultado global de sus decisiones no lo es. Nos encontramos, de nuevo, ante el dilema del prisionero.

Pero aún nos queda otra pregunta: ¿por qué la Unión Europea y Estados Unidos, que son los dos principales emisores mundiales de gases de efecto invernadero y los que soportan el mayor peso económico de Kioto, mantienen posturas diametralmente opuestas con respecto al protocolo? ¿Por qué la Unión Europea colabora, aunque la teoría de juegos le aconseja hacer lo contrario? Se podría pensar que la razón es que los europeos están más sensibilizados con el medio ambiente y la ecología que los norteamericanos. Pero la respuesta no es, ni mucho menos, tan sencilla.



Mapamundi que muestra los países comprometidos a reducir las emisiones de CO_2 entre 2008 y 2012 (26 de noviembre de 2010).

En realidad, los estados con más peso en la Unión Europea —Alemania, Francia y Reino Unido— no se van a ver obligados a realizar tanto esfuerzo como parece para cumplir Kioto. En efecto, desde 1990, el año base del Protocolo, han pasado muchas cosas en el mapa geopolítico. En Alemania, con la caída del Muro de Berlín en 1989,

la ineficiente industria pesada de la Alemania Oriental comenzó a ser desmantelada debido al colapso económico, y con ello obviamente descendieron las emisiones: en 1997 las emisiones de la Alemania reunificada ya estaban un 12% por debajo de las del año base de Kioto (1990). En el caso de Francia, para 1997 se había producido una estabilización de las emisiones debido al cambio en la fuente de suministro de energía primaria: en 2000 la energía nuclear representaba ya dos quintas partes del consumo total francés. Y por último, en el Reino Unido, para 1997 las emisiones habían experimentado una fuerte bajada gracias a la previsora política energética de Margaret Thatcher, consistente en la sustitución del carbón por el gas natural, que en 2000 copaba ya casi la mitad de la tarta energética británica. Finalmente, el apoyo dado a Kioto por los países de la antigua Unión Soviética se explica porque el desmantelamiento de la industria soviética ha producido un excedente de más de un 30% en las emisiones de CO_2, que estos países —Rusia, Ucrania, etc.— han comenzado a vender en el mercado de derechos de emisión, obteniendo pingües ganancias.

Por otra parte, Estados Unidos no ha ratificado Kioto y Australia lo ha hecho muy tarde porque ambos países usan con profusión el carbón: Estados Unidos es el segundo consumidor, sólo superado por China, y Australia es el primer exportador mundial, de modo que no perciben el Protocolo como una inversión rentable.

KIOTO Y ESPAÑA

España es el país del mundo que más ha incrementado sus emisiones desde 1990 (más del 45%). Pero es que Kioto fue un objetivo, en opinión de algunos, mal negociado para España, porque en 1990, el año de referencia, era el país con la cuota de emisiones anuales por habitante más baja de la Unión Europea y sólo se le permitió ampliarlas en un 15%, sin reparar en que iba a crecer económicamente sobremanera a finales del siglo XX y durante los primeros años del siglo XXI.

Futuro(s)

El desarrollo de los países pobres y el sostenimiento de los países ricos va a depender de la solución que le demos a un problema tan complejo como es el cambio climático. Ante nosotros no se abre un único futuro, sino muchos futuros posibles. Y de nuestras decisiones dependerá cuál de ellos se haga realidad.

Debemos cuidar con esmero el medio ambiente porque es el sistema en el que vivimos, pero también, antes de adoptar una u otra política medioambiental debemos prestar atención a todas las evidencias científicas disponibles. La política ha de contar con la ciencia, la economía y las matemáticas, puesto que poner en práctica medidas inadecuadas puede ser, incluso, más arriesgado que no hacer nada.

Lo que hace tan atractivo un tema como el del cambio climático es, desde luego, que exige la colaboración de todos: climatólogos, meteorólogos, físicos, matemáticos, economistas, biólogos, políticos... y hasta de nosotros, los ciudadanos de a pie. Y en este problema no lineal la teoría del caos, la otra protagonista de este libro, aún tiene mucho que decir. Porque esta teoría nos ha enseñado dos cosas: la primera, que los sistemas complejos, como el tiempo meteorológico y el clima, poseen un orden subyacente, una estructura interna, y la segunda (que se podría decir que es la lección opuesta), que los sistemas simples también pueden poseer dinámicas complejas. Al final, después de todo, Friedrich Nietzsche va a tener razón: «Cada cual ha de organizar el caos que lleva dentro».

Bibliografía

GLEICK, J., *Caos. La creación de una ciencia*, Barcelona, Seix Barral, 1988.

KELLERT, S., *In the Wake of Chaos: Unpredictable Order in Dynamical Systems*, Chicago, University of Chicago Press, 1993.

LOMBORG, B., *En frío. La guía del ecologista escéptico para el cambio climático*, Madrid, Espasa, 2008.

LORENZ, E., *La esencia del caos*, Madrid, Debate, 1995.

RUELLE, D., *Azar y caos*, Madrid, Alianza Editorial, 1993.

SMITH, P., *El caos. Una explicación a la teoría*, Madrid, Cambridge University Press, 2001.

STEWART, I., *¿Juega Dios a los dados?*, Barcelona, Crítica Drakontos, 2007.

TOHARIA, M., *El clima. El calentamiento global y el futuro del planeta*, Barcelona, Debate, 2006.

Índice analítico

La mariposa y el tornado

Teoría del caos y cambio climático

Es posible que los lectores estén familiarizados con la pregunta hipotética de si el aleteo de una mariposa en Brasil puede originar un tornado en Texas. Más interesante que la respuesta tal vez sea una segunda pregunta: ¿Puede el aleteo de la misma mariposa en Brasil evitar un tornado sobre Singapur? Este libro aborda esta y otras cuestiones relativas al clima y sus cambios, pero también a las poblaciones y las epidemias, las señales del cerebro, los latidos del corazón y tantos otros casos de sistemas caóticos.